This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 5038.83
B

Harvard University

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FROM THE LIBRARY OF

GUSTAVUS HAY

(A.B. 1850, M.D. 1857)

OF BOSTON

GIFT OF MRS. HAY

MAY 16, 1908

G. Hoüel

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

OU

COMMENTAIRE

SUR

LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DES

ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Par J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1883

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

OU

COMMENTAIRE

SUR

LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DES

ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

Par J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1883

(Tous droits réservés.

Math 5038.83
B
Harvard College Library
Nov. 12, 1915
Transferred to
Mathematical Library

MAY 15 1908
Harvard University
Math. Dept. Library.
From the estate
of Dr. Gustavus Hay

PRÉFACE.

Cet Opuscule, dont un extrait avait paru il y a vingt ans dans l'*Archiv der Mathematik und Physik*, t. XL, 1863, a été publié intégralement en 1867 par les soins de M. Gauthier-Villars.

Bien qu'il n'en reste plus aujourd'hui d'exemplaires en librairie, le but que je m'étais proposé en écrivant ces pages ne me semble pas atteint, et les réformes que je réclamais dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire n'ont pas encore été réalisées.

Si l'on excepte un ou deux Traités, rédigés en France par des mathématiciens distingués, qui ont reconnu avec moi la nécessité d'un remaniement dans les définitions et dans l'établissement des principes, rien, ou peu s'en faut, n'a été changé dans la routine scolaire. Les nouveaux auteurs n'ont fait qu'entasser sur les mêmes fondements vermoulus quelques débris tombés des hauteurs de l'édifice géométrique, ou se sont évertués à essayer tous les changements d'ordre possibles que l'on peut faire subir aux propositions.

Je n'ai pas voulu pour cela abandonner la lutte, sûr que je suis de l'appui de savants distingués auxquels, malheureusement, la poursuite de leurs découvertes dans les hautes régions de la Science ne permet pas de consacrer leur temps précieux à une lutte qui n'a plus guère qu'un intérêt pédagogique, et qui exige plutôt du bon sens que du génie.

Malgré ce premier insuccès de ma tentative, la conviction profonde que je conserve sur la nécessité de réformer les Traités élémentaires de Géométrie me fait un devoir de continuer mes efforts. L'édition de mon Opuscule de 1867 étant épuisée, j'ai profité de l'obligeance de l'éminent éditeur, dont le dévouement est toujours

prêt quand il s'agit de rendre quelque service à la Science, et qui a bien voulu se charger d'une nouvelle réimpression.

La situation n'ayant pas changé, et les mêmes critiques pouvant encore être formulées, je n'ai pas eu beaucoup de modifications à introduire dans cette édition nouvelle. J'ai seulement modifié quelques passages de l'*Introduction,* et j'ai remplacé l'ancienne *Note I* de l'*Appendice* par un article plus étendu, déjà reproduit dans plusieurs recueils français et étrangers et qui complète quelques idées développées dans le Volume actuel.

Si les auteurs français sont en général restés indifférents aux considérations que j'ai présentées sur leurs méthodes, j'ai du moins la consolation de voir ces idées se répandre à l'étranger, d'où elles reviendront peut-être un jour dans notre pays. Les méthodes fondées sur les *Éléments* d'Euclide, déjà en possession depuis des siècles des écoles de la Grande-Bretagne et de la Scandinavie, sont, depuis quelques années, devenues classiques en Italie. En Russie, on traduit et l'on rajeunit Euclide, en lui conservant sa rigueur et y ajoutant la clarté moderne. L'Allemagne a depuis longtemps l'excellent Traité du Dr Baltzer, qui est à sa cinquième édition. D'autre part, une nouvelle École s'annonce, celle des disciples de Grassmann, ayant pour but de renouveler les bases de la Géométrie, en prenant pour point de départ la considération du mouvement. La France sera forcée tôt ou tard de suivre cette impulsion, et si je ne puis assister à cette réforme si ardemment désirée, j'aurai du moins la satisfaction d'y avoir contribué dans la mesure de mes faibles moyens.

Bordeaux, 22 septembre 1883.

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

INTRODUCTION.

Depuis le temps où le génie de la Grèce s'est illustré par l'invention de la Géométrie rationnelle, on s'est occupé, à toutes les périodes d'activité intellectuelle, de discuter les vérités fondamentales sur lesquelles cette science repose; et cependant, quels qu'aient été le nombre et le mérite des savants qui ont pris part à ce débat, les questions pendantes, relatives aux premiers principes, semblent attendre encore leur solution définitive.

Les auteurs modernes qui ont écrit les premiers sur la Géométrie, en prenant naturellement l'antiquité pour modèle, n'ont pas toujours aperçu la diversité des points de vue des géomètres auxquels ils faisaient des emprunts (1). De là les incohérences de principes qui se sont perpétuées dans les livres élémentaires jusqu'à nos jours, et que la force de l'habitude empêche de reconnaître, malgré leur contraste choquant avec l'état actuel de la Science.

Sans doute ces imperfections n'ont pas échappé à la généralité des mathématiciens éminents de notre époque. Malheureusement on serait tenté de croire que ces vices des méthodes didactiques, adoptées pour l'enseignement des éléments, n'étendent pas leur influence funeste jusqu'à la région des hautes théories, où se font

---

(1) *Voir*, par exemple, la Note IV, où est expliquée la divergence des doctrines développées par Euclide et par Archimède, et que les auteurs modernes ont cru pouvoir confondre en une seule.

les brillantes découvertes, et les maîtres de la Science ne paraissent pas se préoccuper de délivrer les leçons données aux commençants des fausses idées qui s'y rencontrent et d'appuyer de leur imposante autorité les changements que réclament les méthodes en usage.

En attendant que le secours nous vienne d'en haut, j'ai cru qu'il ne serait peut-être pas inutile de recourir à une autre autorité, consacrée par une tradition plus de vingt fois séculaire, et dont le nom seul commande l'attention. Euclide, il est vrai, compte aujourd'hui chez nous plus d'admirateurs que de lecteurs, et cet abandon a son excuse dans l'absence d'une traduction française en langage géométrique moderne, pareille à celles qu'ont données depuis longtemps Barrow, en Angleterre, et Lorenz, en Allemagne, et tout récemment M. V.-Zakhartchenko, en Russie. Il n'est pas étonnant que la forme pesante et embarrassée du texte ancien, reproduite dans nos versions littérales, ait puissamment contribué à rebuter les lecteurs. Pourvus d'une traduction plus lisible, nos auteurs modernes, en étudiant sérieusement le grand géomètre grec, auraient pu constater les fautes de méthode et de logique qui déparent leurs ouvrages et qu'Euclide se serait bien gardé de commettre.

Le but principal du présent travail est de mettre en lumière la supériorité d'Euclide sur la plupart des auteurs contemporains, pour tout ce qui touche l'exposition des premiers principes de la Géométrie. Notre admiration pour l'auteur des *Éléments* ne nous entraînera pas, il est vrai, jusqu'à proposer la substitution pure et simple du texte d'Euclide aux Traités modernes. La forme de l'exposition, même dans une traduction libre, choquerait les habitudes des lecteurs. Ensuite, plusieurs passages, défigurés peut-être par les commentateurs ou les copistes, devraient être modifiés. Enfin les tendances des Mathématiques modernes visent à introduire de plus en plus dans l'enseignement la méthode analytique et inductive, dont les avantages sur la méthode dogmatique des anciens ne sont plus aujourd'hui contestés.

Mais, tel qu'il est, le vieil Euclide offre encore à nos auteurs actuels la matière de nombreux emprunts, qui amélioreraient notablement leurs ouvrages. Ils y verraient avec quel soin les axiomes sont posés et réduits au moindre nombre possible. Ils apprendraient que jamais Euclide n'a songé à donner de la ligne droite la prétendue

définition qui se lit en tête de presque tous nos Traités classiques, et que tant de gens attribuent au grand géomètre, sur la foi de quelques traductions infidèles ([1]).

Pour établir sur une base solide les principes de la Géométrie, il faut commencer par établir les axiomes sur lesquels la Science repose, et savoir préciser la dépendance qui existe entre chacune des propositions et les axiomes admis.

Cette question conduit à chercher ce que deviendraient les propositions d'Euclide, à partir de la 29e, dans le cas où l'on ferait abstraction de l'axiome des parallèles, et nous dirons, à ce propos, quelques mots des découvertes profondes faites sur cet objet, dans les premières années de ce siècle, par Lobatchefsky et Bolyai, qui, tous les deux, sans s'être entendus, sont parvenus en même temps à reconstituer la théorie que Gauss possédait depuis longues années sans la communiquer au public. Cette nouvelle géométrie, après avoir soulevé de vives oppositions, fondées en grande partie sur des malentendus, a fini par trouver accès chez la généralité des mathématiciens, et déjà elle a rendu de grands services à l'Analyse, en lui offrant un nouveau moyen de représentation géométrique des symboles analytiques, dont la représentation par la Géométrie usuelle n'est qu'un cas particulier.

La source de ce désaccord passager entre les géomètres doit être cherchée, croyons-nous, dans le faux point de vue métaphysique où l'on s'est placé en considérant la Géométrie comme une science de pur raisonnement et ne voulant admettre parmi ses axiomes que des vérités *nécessaires* et du domaine de la logique abstraite. On a été conduit ainsi à attribuer aux axiomes une nature toute différente de celle des autres vérités géométriques que l'expérience nous révèle en dehors de toute étude scientifique, et que le géomètre rattache à ces axiomes comme conséquences.

Cependant la Géométrie, de même que la Mécanique et la Phy-

([1]) Ce théorème sur la ligne de plus courte distance ne signifie pas autre chose que l'énoncé des conditions de minimum de l'intégrale définie $\int^b \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ et ne peut être compris qu'après l'explication, plus ou moins élémentaire, de l'opération indiquée par le signe sommatoire. Autrement, on fait du Calcul intégral comme M. Jourdain faisait de la prose, et nous ajoutons qu'on le fait mal. (*Voir* Note IV.)

sique, a pour objet l'étude d'une grandeur concrète, l'étendue [1], affectant nos sens d'une certaine manière, et c'est seulement par les révélations des sens que nous avons pu connaître les propriétés fondamentales de cette espèce particulière de grandeur. Ces propriétés, indéfinissables et indémontrables, sont les termes de comparaison obligés auxquels nous ne pouvons que rapporter les autres propriétés, à l'aide du raisonnement.

D'après cela, les sens peuvent seuls nous mettre en relation avec l'étendue, et ils nous en font connaître déjà un grand nombre de propriétés, sans emprunter le secours de la logique déductive. Parmi ces propriétés, les unes sont tellement simples, tellement faciles à constater, que la force de l'habitude, jointe à la tradition constante de l'École, a bien pu faire oublier leur véritable origine, et le rôle essentiel qu'ont joué les sens dans leur découverte. On a confondu, sous le nom d'*axiomes*, ces vérités avec les vérités abstraites, qui se rapportent à la science des grandeurs en général ou à l'Arithmétique universelle [2].

D'autres propriétés, enseignées également par l'expérience et jouissant de la même certitude immédiate que les précédentes, se déduisent néanmoins de celles-ci comme conséquences, et on les a classées, sous le nom de *théorèmes*, à côté des vérités plus cachées, que le raisonnement seul pouvait faire apercevoir.

Le partage de ces vérités fondamentales en axiomes et en théorèmes est, jusqu'à un certain point, arbitraire. Ainsi, lorsque deux de ces vérités sont des conséquences réciproques l'une de l'autre, on peut prendre celle des deux que l'on voudra pour axiome, l'autre devenant alors un théorème.

Le nombre des axiomes peut varier, suivant l'ordre que l'on adopte dans la subordination des propositions. Il y a cependant un minimum au-dessous duquel ce nombre ne saurait être réduit, comme le prouvent les tentatives infructueuses auquelles nous faisions tout à l'heure allusion.

Nous nous proposons, dans ce travail, de présenter quelques

---

(1) *Voir* Note I.

(2) Ainsi, parmi les douze propositions qu'Euclide désigne sous le nom de κοιναὶ ἔννοιαι, les trois dernières seules appartiennent spécialement à la Géométrie. Les sept premières s'appliquent à toute espèce de grandeur.

considérations sur le nombre et la nature des axiomes nécessaires de la Géométrie rationnelle. Nous avons dû examiner, à cette occasion, les idées qui ont servi de base aux *Éléments* de Legendre, et qui dominent encore dans la plupart des Traités modernes, auxquels celui de Legendre a servi de type. Pour y reconnaître de nombreuses inexactitudes, il nous a suffi d'en faire la comparaison avec les principes d'Euclide et les discussions des géomètres qui ont su se pénétrer de l'esprit de l'immortel auteur des anciens *Éléments*.

L'ouvrage d'Euclide lui-même, quelque supériorité que l'on doive lui reconnaître sur ses successeurs, ne nous a pas paru à l'abri de toute critique, et nous avons cru pouvoir y signaler de légères imperfections, qu'il serait d'ailleurs aisé de faire disparaître, sans altérer au fond l'admirable enchaînement des vérités que renferme ce chef-d'œuvre de logique.

L'immense succès qu'ont eu les *Éléments* de Legendre, à leur apparition, n'est pas dû seulement à la renommée scientifique de cet illustre analyste. Il tient aussi aux éminentes qualités de précision et de clarté qui distinguent la rédaction de ce livre, où l'auteur a si bien su reproduire la forme et le style des géomètres de l'antiquité. Malheureusement Legendre, entraîné par l'exemple de ses contemporains, n'a pas su conserver dans toute leur pureté les méthodes vraiment géométriques des anciens, et il les a profondément altérées, en y mêlant les procédés arithmétiques de l'Analyse moderne.

Chez Euclide, la Géométrie forme une science complète, qui se suffit à elle-même et n'invoque nulle part, dans ses démonstrations, le secours de la science des nombres. C'est plutôt celle-ci qui empruntera à la Géométrie ses dénominations et qui, rendue sensible aux yeux par le moyen des figures, pourra fonder ses premiers principes sur une évidence tout intuitive.

Legendre, au contraire, introduit à chaque instant dans ses raisonnements des considérations qui supposent les grandeurs géométriques remplacées par des nombres. C'est ainsi qu'il parle de produit de lignes multipliées par des lignes ou par des surfaces. Dans les démonstrations où il fait usage des proportions, il applique immédiatement aux proportions entre lignes des théorèmes d'Arithmétique établis seulement pour les proportions entre nombres

rationnels, et l'extension au cas des incommensurables, qu'il croit démontrer par un artifice imité des géomètres anciens, ne peut être justifiée, tant que l'on n'a pas défini avec plus de précision l'égalité de deux rapports entre quantités incommensurables. Nous n'insisterons pas davantage sur les défauts de ces méthodes, qui aujourd'hui sont en partie abandonnées.

Nous nous occuperons plus particulièrement des propositions fondamentales du *premier Livre,* qui se rattachent immédiatement aux axiomes. Comme nous l'avons déjà fait entendre, si l'on n'avait d'autre but que de mettre *hors de doute* chacune des vérités géométriques, on pourrait faire un bien plus large appel à l'expérience, en supprimant la plupart des démonstrations dans cette partie de la Géométrie, et prenant pour axiomes le plus grand nombre des propositions énoncées. Nul homme de bon sens aujourd'hui ne se donnerait la peine de réfuter un sophiste niant que, pour aller d'un point à une droite, la perpendiculaire soit plus courte que l'oblique, et ce n'est pas l'évidence qui manquerait à cette proposition pour être rangée parmi les axiomes de la Géométrie.

Mais l'auteur d'un Traité de Géométrie ne doit pas seulement chercher à convaincre l'esprit du lecteur, il doit chercher à l'éclairer et, s'il ne s'attache pas à établir avec soin l'enchaînement et la subordination des propositions, il arrivera à rassembler des vérités qui resteront isolées et stériles. Faute de connaître le lien qui les unit, le lecteur ne sera nullement préparé à passer des vérités connues à d'autres plus cachées, et il aura perdu l'occasion de se familiariser, sur des exemples simples, avec les procédés de recherche de la Géométrie.

Il importe donc de bien préciser d'abord quelle est la nature des axiomes, et de les réduire au plus petit nombre possible. Pour nous guider dans cette recherche, nous ne perdrons jamais de vue cette maxime, trop souvent méconnue, que *les vérités simples doivent pouvoir se démontrer simplement.* Si quelqu'un des premiers principes de la Science ne peut se déduire d'une manière courte et facile des principes précédemment posés, on aura lieu de soupçonner qu'il n'en est pas une conséquence et qu'il est lui-même un axiome indémontrable. Il faut donc se défier des démonstrations longues et compliquées, par lesquelles on a souvent pré-

tendu établir des propositions qu'on s'obstinait à ne pas admettre parmi les axiomes. Par un examen approfondi, on a fini généralement par constater qu'il en est de ces démonstrations comme des appareils ingénieux au moyen desquels on espère quelquefois réaliser le mouvement perpétuel. Il s'en faut de bien peu que l'appareil ne marche; mais il ne marche pas. D'autres fois, on s'aperçoit que la proposition à démontrer n'avait pas été rattachée à celles dont elle est naturellement la conséquence.

Si nous appliquons ces considérations à l'examen des Traités de Géométrie qui ont paru jusqu'à ce jour, nous verrons sans peine qu'ils laissent presque tous à désirer sous ces divers rapports.

Au point de vue de la rigueur des déductions et du choix des axiomes, aucun Traité, jusqu'à présent, n'a surpassé les *Éléments* d'Euclide, malgré quelques points défectueux, qu'il serait facile de corriger. Si les démonstrations d'Euclide n'ont pas toujours la simplicité qui semble régner dans les Ouvrages modernes, cela tient bien moins au fond même de ces démonstrations qu'à la forme dogmatique adoptée par l'auteur dans sa préoccupation de fermer avant tout la bouche à des sophistes que la Grèce avait le tort de prendre au sérieux. De là son habitude de démontrer toujours qu'une chose *ne peut pas ne pas être,* au lieu d'établir qu'elle *est* et de faire voir en même temps *pourquoi* elle est et comment on a été conduit à reconnaître son existence. Il suffirait souvent de quelques légères modifications pour transformer les raisonnements indirects d'Euclide en raisonnements directs. On ne peut d'ailleurs lui faire un reproche de n'avoir pas usé dans certains cas des procédés beaucoup plus courts de l'Analyse moderne.

On est forcé de convenir aussi que l'ordre des propositions du *premier Livre* d'Euclide n'est pas complètement satisfaisant; il semble quelquefois que l'auteur ait rangé ses propositions sans avoir égard à leur simplicité ou à leur importance, et en s'imposant pour seule condition que la démonstration de chaque proposition ne s'appuyât que sur les propositions qui la précèdent (¹).

Si l'on joint à cela l'absence d'une bonne traduction française, faite en dehors de toute préoccupation archéologique, et repro-

---

(¹) *Voir* les notes relatives aux propositions 5 et 13 du premier Livre d'Euclide, pages 19 et 25.

duisant les idées de l'auteur dans le langage plus clair et plus précis de la Géométrie moderne, on comprend que la lecture d'Euclide puisse offrir quelque difficulté aux commençants, et ainsi s'explique, jusqu'à un certain point, l'oubli où il est tombé dans nos écoles.

Et cependant, pour un géomètre intimement pénétré de l'esprit de rigueur qui règne dans cet admirable Ouvrage, et joignant à cela la connaissance des ressources de la science actuelle, rien ne serait plus aisé que de tirer du Livre des *Éléments* un Traité aussi correct pour le fond des idées, et débarrassé de ce que la forme offre d'aride et de rebutant (¹). Il lui suffirait de subordonner les propositions à un ordre plus rationnel, de remplacer autant que possible les démonstrations *par l'absurde* par des démonstrations directes, plus simples et plus lumineuses, et enfin d'invoquer, quand il y a lieu, le grand principe des *limites*, que les anciens n'avaient osé formuler dans toute sa généralité.

Sans vouloir entreprendre une tâche aussi longue, je me bornerai ici à soumettre aux auteurs, qui seraient disposés à concourir à cette œuvre si utile, le résultat de mes recherches sur le *premier Livre* d'Euclide.

J'ai commencé par donner la traduction des trente-deux premières propositions de ce Livre, qui font l'objet de mon travail. En abandonnant le système littéral suivi par R. Simson et par Peyrard, j'ai pris pour modèle l'édition allemande de Lorenz, où le langage ordinaire est remplacé autant que possible par les signes algébriques, plus concis et plus clairs.

J'indique, dans les notes placées au bas des pages, les endroits où le texte d'Euclide m'a semblé défectueux ou incomplet, tout en pensant, avec R. Simson, qu'une grande partie des défauts signalés peut être attribuée à la maladresse des commentateurs par les mains desquels les *Éléments* nous ont été transmis, et qui ne se sont pas fait faute de substituer leurs idées à celles de l'auteur, quand ils n'en comprenaient pas la portée.

Je me suis efforcé de délimiter avec plus de précision les axiomes purement géométriques, en les rattachant à leur origine expéri-

---

(¹) C'est ce que vient de réaliser avec succès le récent éditeur des *Éléments*, M. V.-Zakhartchenko.

mentale. Parmi les vérités qu'Euclide a rassemblées sous le nom de *Notions communes,* j'ai déjà fait remarquer que les sept premières appartiennent à la science des grandeurs en général. Les deux suivantes (les axiomes 8 et 9) ne sont pas, à proprement parler, des axiomes, mais des définitions. Enfin on n'y trouve pas l'énoncé de certains principes fondamentaux, qui se rattachent à l'origine expérimentale de la science géométrique.

Les *demandes* sont au nombre de trois. Nous proposons d'en ajouter une quatrième, dont Euclide fait souvent un usage tacite, quoiqu'il semble avoir voulu d'abord l'éviter à l'aide des propositions 2 et 3. Nous *demanderons* qu'une figure invariable de forme puisse être transportée d'une manière quelconque dans son plan ou dans l'espace [1].

J'expose ensuite, sous forme de commentaire sur les 32 premières propositions d'Euclide, l'esquisse d'un plan suivant lequel on pourrait reconstruire plus régulièrement cette partie du *premier Livre*. J'ai essayé de montrer comment, en ne perdant jamais de vue l'origine des idées géométriques, et rapportant toujours chaque proposition à sa véritable source, on introduit dans la théorie plus de clarté et de généralité, tout en restant plus près des applications pratiques, et l'on est tout préparé, par l'analogie des procédés, à l'étude des méthodes de la nouvelle Géométrie.

Les premières propositions du *premier Livre* pourront se classer d'après les divisions suivantes :

1° Propriétés des angles ayant même sommet.

2° Propriétés des angles ayant des sommets différents (théorie des parallèles).

3° Propriétés d'un triangle. — Égalités et inégalités dans un triangle.

4° Comparaison de deux triangles. — Cas d'égalité. — Cas d'inégalité.

Viendraient ensuite les propriétés des quadrilatères et des polygones en général.

Mon but n'étant nullement de rédiger le commencement d'un Traité classique, je me suis attaché à la discussion des principes

---

[1] *Voir* Notes I et II.

et à la comparaison des méthodes, sans chercher à proportionner les développements suivant la régularité didactique.

L'Appendice, composé de plusieurs Notes trop longues pour trouver place dans le texte, est terminé par quelques réflexions sur l'importance de l'enseignement de la Géométrie élémentaire, sur les moyens de rendre cet enseignement plus fructueux au double point de vue de la théorie et des applications, et sur les avantages que la Géométrie présente sur l'Analyse abstraite, comme première préparation à l'étude des parties plus élevées des Mathématiques.

LES

XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DU PREMIER LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Un *point* est ce qui n'a pas de parties.
2. Une *ligne* est une longueur sans largeur (1).
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne *droite* est celle qui est située semblablement par rapport à tous ses points (2).
5. Une *surface* est ce qui a seulement longueur et largeur (3).
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface *plane* est celle qui est située semblablement par rapport aux lignes droites qu'elle contient (4).
8. Un *angle plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui

(1) Cette définition rappelle vaguement l'origine expérimentale de la notion de ligne.

(2) Cette définition, conçue en termes assez obscurs, veut dire sans doute que la ligne droite est composée semblablement en tous ses points, ou qu'elle est superposable à elle-même dans toutes ses parties. C'est, en effet, de cette propriété fondamentale que découlent toutes les autres propriétés de la ligne droite.

(3) Même remarque que pour la définition 2.

(4) Définition aussi peu claire que celle de la ligne droite. Elle doit signifier que le plan est une surface superposable à elle-même dans toutes ses parties. R. Simson la remplace par la propriété du plan de contenir tout entière toute droite qui a deux points communs avec lui. (*Voir* la Note III.)

se rencontrent dans un plan, et qui ont des directions différentes ([1]).

9. Lorsque les lignes qui comprennent un angle plan sont droites, l'angle est appelé *rectiligne*.

10. Lorsqu'une droite, rencontrant une autre droite, fait avec elle deux angles adjacents égaux, chacun de ces angles est un angle *droit,* et la première droite est dite *perpendiculaire* sur la seconde.

11. L'angle *obtus* est celui qui est plus grand qu'un angle droit.

12. L'angle *aigu* est celui qui est plus petit qu'un angle droit.

13. On nomme *limite* ce qui est l'extrémité de quelque chose ([2]).

14. On nomme *figure* ce qui est entouré par une ou par plusieurs limites ([3]).

15. Un *cercle* est une figure plane, entourée par une seule ligne ([4]), appelée *circonférence,* et telle que toutes les droites, appelées *rayons,* menées à cette circonférence, d'un certain point situé à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles.

16. Ce point se nomme le *centre* du cercle.

17. Un *diamètre* du cercle est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la circonférence : cette droite partage le cercle en deux parties égales ([5]).

18. Un *demi-cercle* est la figure comprise entre le diamètre et l'une des portions égales dans lesquelles ce diamètre partage la circonférence.

19. Un *segment* de cercle est la figure comprise entre une droite et l'une des portions inégales dans lesquelles cette droite partage la circonférence.

([1]) On ne voit guère, d'après les termes de cette définition, ce qu'il faut entendre par deux lignes non droites qui n'ont pas la même direction (μὴ ἐπ' εὐθείαις κειμένων). R. Simson suppose ici quelque interpolation d'un copiste maladroit, et il est d'avis de fondre cette définition avec la suivante, en supprimant tout ce qui ne se rapporte pas aux lignes droites. D'ailleurs Euclide n'introduit pas une seule fois, dans la suite de l'Ouvrage, la considération des angles curvilignes.

([2]) R. Simson considère cette définition comme superflue.

([3]) Le mot *figure* se prend maintenant dans un sens plus général.

([4]) Une ligne rentrant sur elle-même.

([5]) Cette dernière phrase est l'énoncé d'un théorème, qui est du reste une conséquence immédiate de la définition du cercle.

20. On appelle figures *rectilignes* celles qui sont entourées par des droites;

21. Figures *trilatères,* celles qui sont entourées par trois droites;

22. Figures *quadrilatères,* celles qui sont entourées par quatre droites;

23. Figures *multilatères,* celles qui sont entourées par plus de quatre droites.

24. Parmi les figures trilatères, on nomme *triangle équilatéral* celle qui a ses trois côtés égaux;

25. Triangle *isoscèle* (1), celle qui a seulement deux côtés égaux;

26. Triangle *scalène,* celle qui a ses trois côtés inégaux;

27. Triangle *rectangle,* celle qui a un angle droit;

28. Triangle *obtusangle,* celle qui a un angle obtus;

29. Triangle *acutangle,* celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, on nomme *carré* celle qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles droits;

31. *Rectangle,* celle qui a ses angles droits, sans avoir tous ses côtés égaux;

32. *Losange,* celle qui a tous ses côtés égaux, sans avoir ses angles droits;

33. *Parallélogramme* (2), celle qui a ses côtés opposés égaux deux à deux seulement, et ses angles opposés égaux, mais non droits.

34. Toutes les autres figures de quatre côtés s'appellent simplement *quadrilatères* (3). Asup 36.

---

(1) Un grand nombre d'auteurs persistent à écrire *isocèle, hypothénuse, parallélipipède,* au lieu de *isoscèle, hypoténuse, parallélépipède.* Ce sont là autant de barbarismes.

(2) Nous avons substitué au mot *rhomboïde* du texte le mot par lequel cette figure est généralement désignée aujourd'hui, quoique ce mot soit tiré d'une définition différente. Il est d'ailleurs employé partout dans la suite par Euclide lui-même. (*Voir* liv. I, prop. 34 et suiv.)

(3) Le mot *trapèze,* qui se trouve dans le texte, se prend maintenant dans un sens plus restreint.

DEMANDES.

On demande de pouvoir :

1. Mener une ligne droite d'un point quelconque à un autre point quelconque;

2. Prolonger indéfiniment, suivant sa direction, une ligne droite finie;

3. Décrire un cercle d'un point quelconque comme centre et avec une distance quelconque (comme *rayon*).

AXIOMES (1).

1. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles (2).

2. Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront égales (3).

3. Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux (4).

4. Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront inégales (dans le même sens) (5).

5. Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux (dans le même sens) (6).

---

(1) Nous traduisons ainsi les mots κοιναὶ ἔννοιαι (notions communes), titre sous lequel Euclide réunit des énoncés de natures fort différentes et qui ne doit pas être pris dans le sens que l'on attache, dans nos Traités modernes, au mot *axiome*. Les sept premiers énoncés expriment des vérités relatives à toute espèce de grandeurs, aussi bien qu'aux grandeurs géométriques; les énoncés 8 et 9 sont de simples définitions; les trois derniers seuls sont des axiomes géométriques proprement dits. Nous ne saurions admettre l'opinion de Peyrard, qui, d'après certains manuscrits, range ces trois derniers énoncés parmi les *demandes*. On voit aisément que ce sont là des propositions d'un tout autre caractère, et il est bien plus conforme à l'esprit d'Euclide d'en faire, avec Barrow, R. Simson et Lorenz, les fondements expérimentaux de la science géométrique.

(2) $A = B$, $A = C$; donc $B = C$.

(3) $A = B$, $A' = B'$; donc $A + A' = B + B'$.

(4) $A = B$, $A' = B'$; donc $A - A' = B - B'$.

(5) $A \gtrless B$, $A' = B'$; donc $A + A' \gtrless B + B'$.

(6) $A \gtrless B$, $A' = B'$; donc $A - A' \gtrless B - B'$.

6. Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles ([1]).

7. Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles ([2]).

8. Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles ([3]).

9. Le tout est *plus grand que* la partie ([4]).

10. Tous les angles droits sont égaux ([5]).

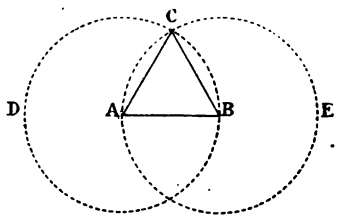
11. Si deux droites sont rencontrées par une troisième, qui forme avec elles deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme soit moindre que deux angles droits, ces deux droites, prolongées indéfiniment, finiront par se rencontrer du côté où elles forment les deux angles valant ensemble moins de deux angles droits ([6]).

12. Deux droites ne peuvent entourer un espace ([7]).

PROPOSITION 1.

Sur une droite finie donnée AB (*fig.* 1), *construire un triangle équilatéral.*

Fig. 1.



Du centre A, avec le rayon AB, décrivons le cercle BCD [dem. 3];

([1]) A = B; donc 2A = 2B.

([2]) A = B; donc $\frac{1}{2}$A = $\frac{1}{2}$B.

([3]) Définition de l'*égalité géométrique*.

([4]) Définition des mots *plus grand que*, ou de l'*inégalité* en général.

([5]) Legendre et d'autres auteurs ont cru nécessaire de faire de cet énoncé un théorème distinct, bien que ce soit une conséquence immédiate de la définition de la ligne droite.

([6]) Axiome connu improprement sous le nom de *postulatum* d'Euclide. (*Voir* à ce sujet la Note 9.)

([7]) C'est-à-dire qu'entre deux points on ne peut mener qu'une ligne droite.

du centre B, avec le rayon BA, décrivons le cercle ACE. Du point C, où ces deux cercles se coupent (1), menons aux points A et B les droites CA, CB [dem. 1]. ABC sera le triangle demandé.

En effet, puisque l'on a

$$AC = AB \text{ [déf. 15]}$$

et

$$BC = BA,$$

il en résulte

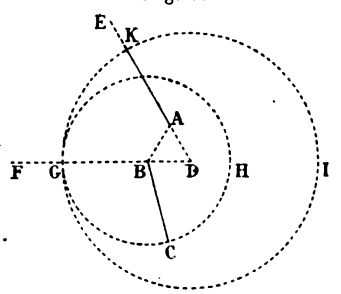
$$AC = BC \text{ [ax. 1]}.$$

Par conséquent $AC = AB = BC$, et il s'ensuit [déf. 24] que le triangle construit sur AB est équilatéral.

PROPOSITION 2.

A partir d'un point donné A (*fig.* 2), *placer une droite égale à une droite donnée* BC (2).

Fig. 2.



Menons de A en B la droite AB [dem. 1]. Sur cette droite, construisons le triangle équilatéral ABD [pr. 1]. Prolongeons les

(1) La démonstration d'Euclide semble incomplète, en ce qu'elle ne fait pas voir que les deux cercles se coupent nécessairement. Il suffit, pour la compléter, de faire remarquer que chacun des deux cercles a un point intérieur et un point extérieur par rapport à l'autre cercle.

(2) Cette proposition est devenue, pour les auteurs modernes, un cas particulier d'une demande plus générale, que tous font, au moins tacitement, savoir : *Qu'une figure peut être transportée d'une manière quelconque, dans son plan ou, plus généralement, dans l'espace, sans qu'aucun de ses éléments, distances mutuelles ou angles, change de grandeur.*

droites DA et DB vers E et F [dem. 2]. Du centre B, avec le rayon BC, décrivons le cercle CGH; et du centre D, avec le rayon DG, décrivons le cercle GIK [dem. 3]. La droite AK = BC sera placée à partir du point A, comme on le demandait.

En effet, puisqu'on a

$$DK = DG \text{ [déf. 15]},$$

et

$$DA = DB \text{ [déf. 24]},$$

il en résulte

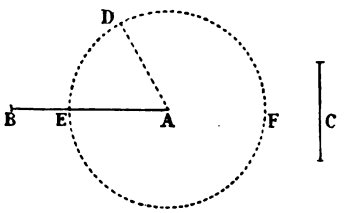
$$AK = BG \text{ [ax. 3]}.$$

Or on a BC = BG, et par suite AK et BC sont l'une et l'autre égales à BG; par suite AK = BC [ax. 1].

PROPOSITION 3.

Étant données deux droites inégales, AB, C (*fig.* 3), *retrancher de la plus grande* AB *une droite égale à la plus petite* C (1).

Fig. 3.



Au point A plaçons une droite AD = C [pr. 2], et du centre A, avec le rayon AD, décrivons le cercle DEF [dem. 3], rencontrant AB en E. On aura ainsi retranché de AB la ligne AE = C.

Car on a AE = AD [déf. 15]; d'ailleurs C = AD. Donc AE = C [ax. 1], et par suite BE = AB — C (2).

---

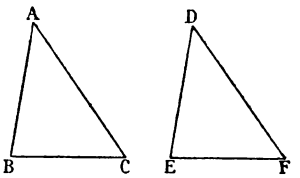
(1) Même observation que pour la proposition précédente.

(2) Si l'on donne la droite AD toute prête placée au point A, la construction se réduit à tracer simplement le cercle DEF [dem. 3], et l'on a immédiatement AE = AD [déf. 15].

PROPOSITION 4.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 4) *ont les deux côtés* AB, AC *respectivement égaux aux deux côtés* DE, DF, *et si les angles*

Fig. 4.



BAC, EDF, *compris entre les côtés égaux, sont égaux, ces triangles auront leurs bases* BC, EF *égales ; les triangles seront égaux et les angles restants, opposés aux côtés égaux,* ABC *et* DEF, ACB *et* DFE, *seront égaux chacun à chacun.*

Appliquons, en effet, le triangle ABC sur le triangle DEF [1], et, pour cela, plaçons le point A sur le point D, et la ligne AB sur la ligne DE. Le point B coïncidera avec E, puisque AB = DE. Ensuite, AB étant placé sur DE, et l'angle BAC étant égal à EDF, AC prendra la direction de DF, et, puisque AC = DF, le point C tombera sur le point F. Donc, puisque B coïncide avec E, et C avec F, BC coïncidera avec EF ; car, s'il en était autrement, ces deux droites, qui ont mêmes extrémités, renfermeraient entre elles un espace, ce qui est impossible [ax. 12]. Donc on a [ax. 8]

$$BC = EF, \qquad \text{triangle } ABC = \text{triangle } DEF,$$
$$\text{angle } ABC = \text{angle } DEF, \quad \text{angle } ACB = \text{angle } DFE.$$

PROPOSITION 5.

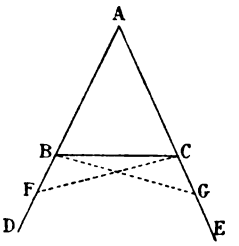
Dans tout triangle isoscèle ABC (*fig.* 5), 1° *les angles à la base* ABC, ACB *sont égaux entre eux;* 2° *si l'on prolonge les côtés*

---

[1] Il semble qu'à partir d'ici Euclide admette implicitement la demande dont il est question dans les notes précédentes. Il en fait usage non seulement pour la démonstration actuelle, mais encore dans d'autres cas (prop. 8, par exemple).

égaux AB, AC, *les angles formés au-dessous de la base,* DBC, ECB, *seront aussi égaux entre eux.*

Fig. 5.



Sur le prolongement BD de AB, prenons à volonté un point F, et sur AE > AF, prenons une longueur AG = AF [pr. 3, note]. Menons ensuite FC, GB.

1° Dans les triangles ACF, ABG, on a AF = AG, AC = AB, et l'angle A est commun. Donc [pr. 4]

$$FC = GB, \quad ACF = ABG, \quad AFC = AGB.$$

Comme on a d'ailleurs AF = AG et AB = AC, il en résulte [ax. 3] BF = CG. Par conséquent, dans les triangles FBC, GCB, on a

$$BF = CG, \quad FC = BG, \quad BFC = BGC.$$

Donc [pr. 4] FBC = GCB, c'est-à-dire que les angles *au-dessous* de la base sont égaux.

2° De plus, BCF = CBG; et, comme on a d'ailleurs

$$ABG = ACF, \quad CBG = BCF,$$

il en résulte [ax. 3] ABC = ACB, c'est-à-dire que les angles *à la base* sont égaux (1).

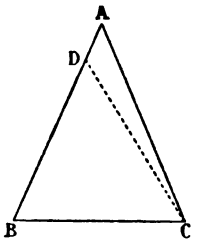
PROPOSITION 6.

Si, dans un triangle ABC (*fig.* 6), *deux angles* ABC, ACB

(1) Cette démonstration aurait pu être abrégée, si Euclide eût appliqué la proposition 4 aux triangles ABC et ACB, et s'il eût placé, comme il eût été plus naturel de le faire, la proposition 13 en tête de ce Livre. (*Voir* la note relative à cette dernière proposition, page 25.)

sont égaux entre eux, les côtés AC, AB, *opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.*

Fig. 6.



Si les côtés AC, AB ne sont pas égaux, soit AB le plus grand. Prenons sur AB la longueur BD = AC [pr. 3], et menons DC. Dans les deux triangles ABC, DCB, on a BD = AC, BC commun, et DBC = ACB; donc [pr. 4]

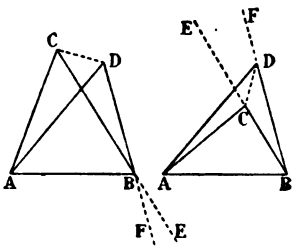
triangle DBC = triangle ABC,

ce qui est impossible [ax. 9] (¹). Donc AC et AB ne peuvent être inégaux. Donc AC = AB.

PROPOSITION 7.

Si l'on joint les extrémités d'une même base AB (*fig.* 7) *à deux points différents* C, D, *situés d'un même côté de cette*

Fig. 7



base, les deux distances CA, CB *du premier point* C *aux extré-*

(¹) Il serait peut-être plus clair de remarquer que de l'égalité des triangles il résulterait que l'angle DCB = ABC [pr. 4], et comme, par hypothèse, ABC=ACB, on aurait DBC = ACB [ax. 1], ce qui est absurde [ax. 9]. On éviterait ainsi la considération des aires des deux triangles.

mités de la base ne peuvent être égales chacune à chacune aux deux distances DA, DB *du second point* D *aux mêmes extrémités.*

Soit, en effet, s'il est possible, AD = AC et BD = BC. Menons CD [et prolongeons BC vers E, BD vers F].

Puisque AD = AC, on a

$$ADC = ACD \text{ [pr. 5]},$$

et par suite

$$ADC > DCE \text{ [ax. 9]},$$

et à plus forte raison

$$FDC > DCE.$$

Mais on a en même temps BD = BC, d'où résulterait

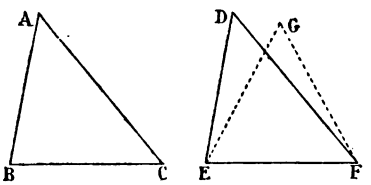
$$FDC = DCE \text{ [pr. 5]},$$

ce qui serait en contradiction avec ce qui précède.

PROPOSITION 8.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 8) *ont leurs deux côtés* AB, AC *respectivement égaux aux deux côtés* DE, DF, *et leurs bases* BC, EF *aussi égales entre elles, les angles, tels que* BAC, EDF, *compris entre des côtés égaux, sont égaux.*

Fig. 8.



Portons le triangle ABC sur le triangle DEF, en plaçant le point B sur le point E, et dirigeant BC suivant EF.

Puisque BC = EF, le point C tombera sur F. Or on a

$$BA = ED \quad \text{et} \quad CA = FD.$$

Par conséquent, le point A tombera sur le point D; car, si A tombait en un autre point G, on devrait avoir

$$GE = AB = DE \quad \text{et} \quad GF = AC = DF \text{ [ax. 1]},$$

en même temps que G différerait de D, ce qui est impossible [pr. 7]. Donc BA coïncidera avec DE, et AC avec DF. On a donc [ax. 8]

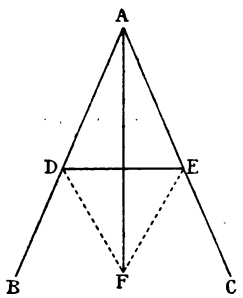
angle BAC = angle EDF [et triangle BAC = triangle EDF].

[Donc, *si deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun, ils peuvent coïncider l'un avec l'autre, et ils sont égaux*].

PROPOSITION 9.

Partager un angle rectiligne donné BAC (*fig.* 9) *en deux parties égales.*

Fig. 9.



Prenons sur AB un point quelconque D, et retranchons de AC la droite AE = AD [pr. 3, note]. Menons DE, et construisons sur DE le triangle équilatéral DEF [pr. 1]. Si l'on mène AF, cette droite partagera l'angle BAC en deux parties égales.

Car les deux triangles ADF, AEF ayant AF commun, AD = AE, DF = EF, il en résulte [pr. 8]

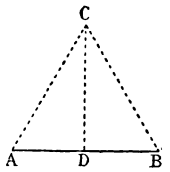
DAF = EAF.

PROPOSITION 10.

Partager une droite finie donnée AB (*fig.* 10) *en deux parties égales.*

Construisons sur AB le triangle équilatéral ABC [pr. 1]. Partageons l'angle ACB en deux parties égales par la droite CD

Fig. 10.



[pr. 9] : cette droite partagera AB en deux parties égales au point D.

Car, les deux triangles ACD, BCD ayant

AC = CB, CD commun, angle ACD = angle BCD,

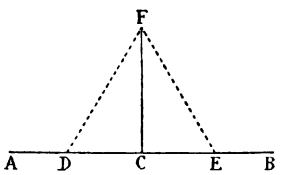
on a [pr. 4]

AD = DB.

PROPOSITION 11.

En un point donné C (*fig.* 11) *d'une droite donnée* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

Fig. 11.



Prenons sur AB un point quelconque D, et faisons CE = CD [pr. 3, note]. Construisons sur DE le triangle équilatéral DEF [pr. 1], et menons FC. La droite FC sera pependiculaire à AB au point C.

Car les deux triangles DCF, ECF ayant CF commun, DC = CE, DF = EF, on a [pr. 8]

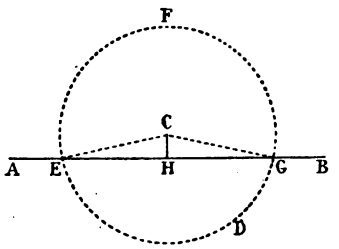
DCF = ECF.

Donc [déf. 10] FC est perpendiculaire sur AB.

PROPOSITION 12.

D'un point donné C (*fig.* 12), *abaisser une perpendiculaire sur une droite indéfinie donnée* AB.

Fig. 12.



Prenons, au delà de AB par rapport à C, un point quelconque D; décrivons, du centre C, avec le rayon CD, le cercle EFG; partageons EG en deux parties égales au point H [pr. 10], et menons CH : cette ligne CH sera perpendiculaire sur AB.

Car, en menant CE, CG, on a EH = HG, CH commun, et [déf. 15] EC = CG. Donc [pr. 8]

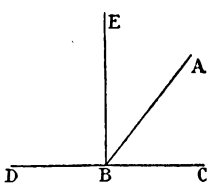
$$EHC = CHG.$$

Donc [déf. 10] CH est perpendiculaire sur AB.

PROPOSITION 13.

Les angles adjacents ABD, ABC (*fig.* 13), *que forme une droite* AB *avec une autre droite* CD, *à laquelle elle se termine,*

Fig. 13.



sont : 1° *tous les deux droits, ou bien* 2° *leur somme est égale à deux angles droits.*

1° Si ces angles sont égaux entre eux, ils sont tous les deux droits [déf. 10].

2° S'ils sont inégaux, comme ABC, ABD, élevons sur DC, au point B, la perpendiculaire BE [pr. 11]. Alors CBE, EBD seront deux angles droits [déf. 10].

Puisque

$$CBE = CBA + ABE,$$

on a, en ajoutant de part et d'autre EBD [ax. 2],

$$CBE + EBD = CBA + ABE + EBD.$$

De même, puisque

$$ABD = DBE + EBA,$$

on a, en ajoutant de part et d'autre CBA,

$$ABD + CBA = DBE + EBA + CBA.$$

Par conséquent [ax. 1],

$$ABD + CBA = CBE + EBD$$

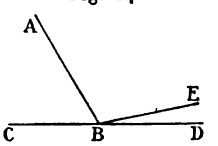
c'est-à-dire que l'on a

$$ABD + CBA = 2 \text{ droits } (^1).$$

PROPOSITION 14.

Si en un point B *d'une droite* AB (*fig.* 14), *deux droites* BC, BD *font avec la première* AB, *et de côtés différents de* AB, *des*

Fig. 14.



angles adjacents ABC, ABD, *dont la somme soit égale à deux*

(1) On peut s'étonner qu'Euclide ait employé un si grand appareil de logique pour prouver que l'angle CBD, formé par les deux directions BD, BC, est égal à la somme de ses deux parties, égales ou inégales, et surtout qu'il ait donné aussi tard une proposition qui aurait dû venir une des premières de ce Livre, comme nous l'avons déjà fait remarquer dans la note sur la proposition 5, page 19.

angles droits, ces deux droites BC, BD *seront le prolongement l'une de l'autre.*

En effet, si BD n'est pas le prolongement de BC, soit BE ce prolongement. On aura alors [pr. 13]

$$CBA + ABE = 2 \text{ droits.}$$

Mais on a, par hypothèse,

$$CBA + ABD = 2 \text{ droits.}$$

Donc [ax. 1 et 10]

$$ABC + ABD = ABC + ABE.$$

Donc, en retranchant ABC de part et d'autre [ax. 3],

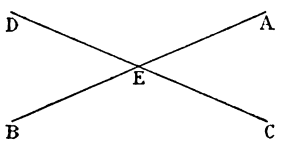
$$ABD = ABE,$$

ce qui est impossible [ax. 9]. Par conséquent, BE ne peut être en ligne droite avec BC, et le même raisonnement s'appliquera pareillement à toute autre droite différente de BD. Donc BC et BD sont le prolongement l'une de l'autre (1).

PROPOSITION 15.

Si deux droites AB, CD (*fig.* 15) *se coupent mutuellement, elles forment des angles opposés par le sommet égaux deux à deux, savoir* CEA = DEB *et* CEB = AED.

Fig. 15.



On a, en effet [pr. 13],

$$CEA + AED = 2 \text{ droits,}$$

et

$$AED + DEB = 2 \text{ droits.}$$

(1) On peut faire sur cette proposition la même remarque que sur la précédente.

Donc [ax. 1 et 10]

$$CEA + AED = AED + DEB;$$

par suite, en ôtant de part et d'autre AED [ax. 3],

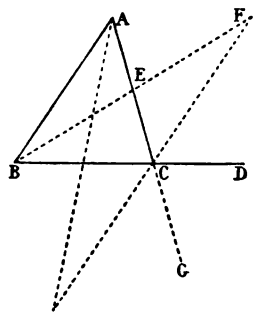
$$CEA = DEB.$$

On démontrerait de même que CEB = AED.

PROPOSITION 16.

Si l'on prolonge un côté BC *d'un triangle* ABC (*fig.* 16), *l'angle extérieur* ACD *est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents* CBA, BAC.

Fig. 16.



Partageons AC en deux parties égales au point E [pr. 10]; menons BE et prolongeons cette droite d'une quantité EF = EB [pr. 3, note]. Menons CF.

Puisque l'on a

$$AE = EC, \quad BE = EF \quad \text{et} \quad AEB = FEC \text{ [pr. 15]},$$

il en résulte [pr. 4]

$$BAE = ECF.$$

Mais on a [ax. 9]

$$ACD > ECF.$$

Par conséquent,

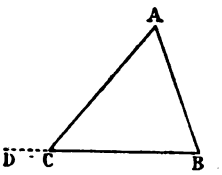
$$ACD > BAE.$$

De même, en partageant BC en deux parties égales, et prolongeant AC vers G, on démontrera que BCG, c'est-à-dire ACD [pr. 15], est plus grand que CBA.

PROPOSITION 17.

Dans tout triangle ABC (*fig.* 17), *la somme de deux angles quelconques* ABC, ACB *est moindre que deux angles droits.*

Fig. 17.



Prolongeons BC vers D. On a [pr. 16]

$$ABC < ACD.$$

Par conséquent [ax. 4],

$$ABC + ACB < ACD + ACB.$$

Or on a [pr. 13]

$$ACD + ACB = 2 \text{ droits.}$$

Donc

$$ABC + ACB < 2 \text{ droits.}$$

On démontrerait de même que chacune des deux sommes

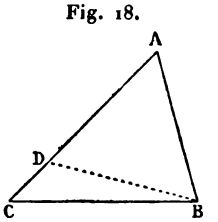
$$BAC + ACB, \quad CAB + ABC$$

est moindre que deux angles droits.

PROPOSITION 18.

Deux côtés AC, AB *d'un triangle* ABC (*fig.* 18) *étant inégaux, au plus grand côté* AC *est opposé un plus grand angle* ABC.

Fig. 18.



Soit AC > AB. Prenons AD = AB [pr. 3, note], et menons BD.

On aura alors [pr. 16]

$$ADB > ACB.$$

Mais

$$ADB = ABD \text{ [pr. 5]}.$$

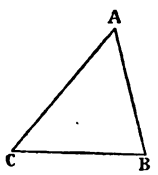
Donc ABD > ACB, et à plus forte raison

$$ABC > ACB.$$

PROPOSITION 19.

Deux angles ABC, ACB *d'un triangle* ABC (*fig.* 19) *étant inégaux, au plus grand angle* ABC *est opposé un plus grand côté* AC.

Fig. 19.



Si l'on n'avait pas AC > AB, il faudrait que l'on eût ou AC = AB ou AC < AB.

Si AC = AB, on aurait [pr. 5] ABC = ACB;

Si AC < AB, on aurait [pr. 18] ABC < ACB.

Ces deux conclusions étant contraires à l'hypothèse ABC > ACB, il s'ensuit que l'on ne peut pas ne pas avoir AC = AB ou > AB.

PROPOSITION 20.

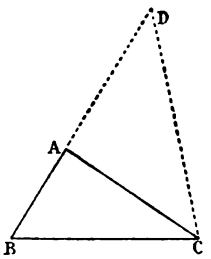
Dans tout triangle ABC (*fig.* 20), *la somme de deux côtés quelconques* AB, AC *est plus grande que le troisième* BC.

Prolongeons AB vers D; faisons AD = AC [pr. 3, note], et menons CD.

Puisque AD = AC, on a ACD = ADC [pr. 4]. Or on a

BCD > ACD [ax. 9]; par suite, BCD > ADC. Donc [pr. 19] BD > BC, c'est-à-dire BA + AC > BC.

Fig. 20.



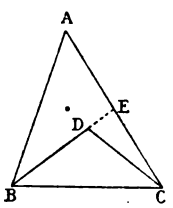
On démontrerait de la même manière que l'on a

$$AB + BC > AC \quad \text{et} \quad BC + CA > AB.$$

PROPOSITION 21.

Si des deux extrémités B, C *de la base* BC (*fig.* 21) *du triangle* ABC *on mène deux droites* BD, CD *à un point* D *intérieur au triangle,* 1° *la somme de ces deux droites est moindre que celle*

Fig. 21.



de deux autres côtés BA, CA *du triangle; mais* 2° *l'angle* BDC *qu'elles comprennent est plus grand que l'angle* BAC *du triangle, opposé à la même base* BC.

1° Prolongeons BD jusqu'à la rencontre de AC en E. Dans le triangle ABE, on a [pr. 20]

$$BA + AE > BE;$$

par suite, en ajoutant CE de part et d'autre [ax. 4],

$$(1) \qquad BA + AC > BE + EC.$$

On a maintenant, dans le triangle CDE [pr. 20],

$$DE + EC > DC,$$

d'où, en ajoutant DB de part et d'autre,

$$(2) \qquad BE + EC > DC + DB.$$

En comparant les inégalités (1) et (2), on en tire, à plus forte raison,

$$BA + AC > DC + DB.$$

2° On a [pr. 16]

$$BDC > BEC \quad \text{et} \quad BEC > BAC.$$

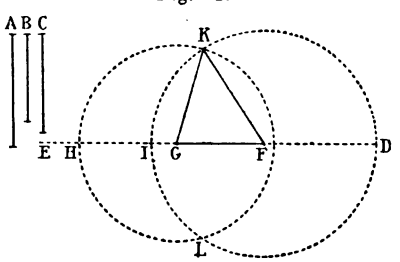
Donc, à plus forte raison,

$$BDC > BAC.$$

PROPOSITION 22.

Construire un triangle (fig. 22) dont les côtés soient égaux à trois lignes données A, B, C, *telles que la somme de deux quelconques d'entre elles soit plus grande que la troisième.*

Fig. 22.



Tirons une droite DE, terminée en D, indéfinie vers E. Prenons DF = A, FG = B, GH = C [pr. 3]. Décrivons du centre F, avec le rayon FD, le cercle DKL, et du centre G, avec le rayon GH, le cercle KLH, qui coupe le cercle DKL en K. Menons KF, KG; KFG sera le triangle demandé.

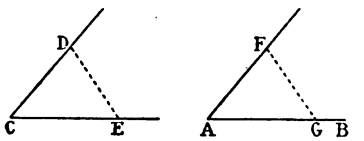
En effet, FD = FK [déf. 15]; or FD = A : donc aussi KF = A [ax. 1]. De même, puisque GK = GH et que GH = C, on a GK = C.

On a d'ailleurs aussi FG = B. Donc le triangle FGK a ses trois côtés égaux respectivement aux lignes données, A, B, C [1].

PROPOSITION 23.

En un point A *d'une droite donnée* AB (*fig.* 23), *construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné* DCE.

Fig. 23.



Sur CD et sur CE prenons arbitrairement deux points D, E, et menons DE. Construisons ensuite le triangle AFG tel que l'on ait

$$AF = CD, \quad AG = CE, \quad DE = FG \text{ [pr. 22]}.$$

On aura [pr. 8]

$$FAG = DCE.$$

PROPOSITION 24.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 24 *et* 25) *ont deux côtés égaux chacun à chacun*, AB = DE, AC = DF, *et l'angle compris par ces côtés inégal*, BAC > EDF, *le côté* BC, *opposé au plus grand angle, est plus grand que le côté* EF, *opposé au plus petit angle.*

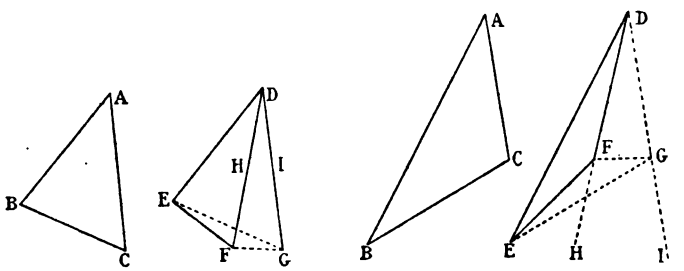
Construisons sur DE, au point D, l'angle EDG = BAC [pr. 23];

---

(1) Euclide a oublié de justifier la restriction contenue dans l'énoncé, que la somme de deux quelconques des côtés est plus grande que le troisième. Or il résulte de cette hypothèse que DG > HG, et que HG > la différence GI entre DF et GF. Donc, d'une part, le point D est *extérieur* au cercle HKL, et, d'autre part, le point I est *intérieur* au même cercle. Donc le cercle DKL, ayant des points extérieurs et des points intérieurs au cercle HKL, coupera nécessairement ce dernier cercle en deux points.

faisons DG = AC = DF [pr. 3]. [Prolongeons DF vers H, DG vers I (*fig.* 25) et] menons EG, FG (¹).

Fig. 24. Fig. 25.



Puisqu'on a AB = DE, AC = DG, BAC = EDG, il en résulte [pr. 5] BC = EG.

Or on a DG = DF, d'où [pr. 5] HFG = IGF.

Par conséquent, EFG > FGI, et, comme FGI > FGE, on a, à plus forte raison, EFG > FGE.

Donc [pr. 19] EG ou BC > EF.

PROPOSITION 25.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 26) *ont deux côtés égaux chacun à chacun,* AB = DE, AC = DF, *et le troisième côté inégal,* BC > EF, *l'angle* BAC, *opposé au plus grand côté, est plus grand que l'angle* EDF, *opposé au plus petit côté.*

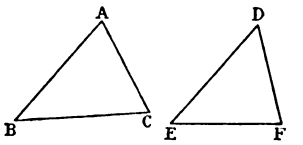
Car, si l'on n'avait pas BAC > EDF, il faudrait que l'on eût ou BAC = EDF, ou BAC < EDF.

Dans le premier cas, il en résulterait [pr. 4] BC = EF; dans

(¹) Nous avons réuni dans la même démonstration les deux cas que peut présenter la figure, et dont un seul (*fig.* 24) avait été considéré par Euclide. R. Simson remarque que l'on pourrait toujours ramener la figure à ce premier cas, en prenant pour DE le plus petit des deux côtés DE, DF; car alors les deux points G, F, étant sur un cercle décrit du centre D, et à l'intérieur duquel se trouve le point E, il est visible que E sera du même côté que D par rapport à la base FG.— Nous n'avons pas considéré le cas où EG passe par le point F, le théorème étant alors évident.

le second [pr. 24], BC < EF. Ces deux conséquences étant

Fig. 26.

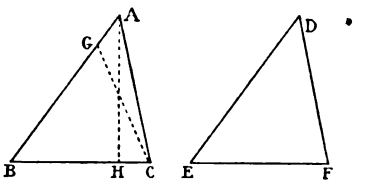


contraires à l'hypothèse BC > EF, on a donc nécessairement BAC > EDF.

PROPOSITION 26.

Si deux triangles ACB, DEF (*fig.* 27) *ont deux angles égaux chacun à chacun,* ABC = DEF, ACB = EFD, *et un côté égal qui soit ou adjacent* (Ier CAS) *aux angles égaux* (BC = EF), *ou*

Fig. 27.



opposé (IIe CAS) *à l'un d'eux* (AB = DE), *les deux autres côtés seront égaux chacun à chacun, et le troisième angle* BAC *sera égal au troisième* EDF.

Ier CAS. — Si les côtés adjacents aux angles égaux, BC et EF, sont égaux, on a :

1° AB = DE. Car, si AB et DE étaient inégaux, soit, par exemple, AB > DE. Prenons alors BG = ED, et menons CG.

Puisque

$$BG = ED, \quad BC = EF, \quad GBC = DEF,$$

il en résulte.

$$BCG = EFD \text{ [pr. 4]}.$$

Or, par hypothèse,

$$BCA = EFD.$$

On aurait donc

$$BCA = BCG,$$

ce qui est impossible [ax. 9]. Donc AB et DE ne sauraient être inégaux.

2° Puisque

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad ABC = DEF,$$

on a [pr. 4]

$$AC = DF \quad \text{et} \quad BAC = EDF.$$

IIe CAS. — Si les côtés opposés à l'un des angles égaux, AB et DE, sont égaux, alors on a :

1° BC = EF. Car, si BC et EF étaient inégaux, soit, par exemple, BC > EF. Prenons alors BH = EF, et menons AH. Puisque

$$BH = EF, \quad AB = DE, \quad ABC = DEF,$$

il en résulte

$$BHA = EFD \text{ [pr. 4]}.$$

Or, par hypothèse,

$$BCA = EFD.$$

On aurait donc

$$BHA = BCA,$$

ce qui est impossible [pr. 17]. Donc BC et EF ne sauraient être inégaux.

2° Puisque

$$BC = EF, \quad AB = DE, \quad ABC = DEF,$$

on a [pr. 4]

$$AC = DF, \quad \text{et} \quad BAC = EDF.$$

PROPOSITION 27.

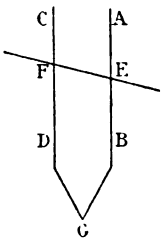
Si deux droites AB, CD (*fig.* 28), *coupées par une troisième* EF, *font avec elle des angles* alternes-internes [1] *égaux* AEF, EFD, *elles sont parallèles.*

---

[1] Nous introduisons, pour plus de simplicité, dans les énoncés d'Euclide, les dénominations appliquées par les géomètres modernes aux divers couples d'angles formés par deux droites qui en rencontrent une troisième. Nous ne reproduisons pas ici les définitions de ces angles, qui se trouvent dans tous les Traités de Géométrie.

Car, si les droites AB, CD n'étaient pas parallèles, alors, en les prolongeant suffisamment dans un sens ou dans l'autre, elles finiraient par se rencontrer. Supposons, s'il est possible, que cette rencontre ait lieu en G. Dans le triangle EFG, on aurait

Fig. 28.

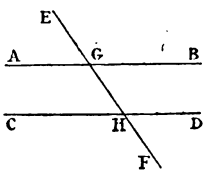


alors AEF > EFD [pr. 16], ce qui est contraire à l'hypothèse admise AEF = EFD. Donc AB et CD ne peuvent se rencontrer de ce côté. Par la même raison, ces lignes ne peuvent se rencontrer de l'autre côté. Donc [déf. 35] AB et CD sont parallèles.

PROPOSITION 28.

Si deux droites AB, CD (*fig.* 29), *coupées par une troisième* EF, *font avec elle :* 1° *ou deux angles correspondants égaux* EGB, GHD, 2° *ou deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires* BGH, GHD, *elles sont parallèles.*

Fig. 29.



1° Puisque EGB = GHD et que EGB = AGH [pr. 15], il en résulte AGH = GHD. Donc [pr. 27] AB et CD sont parallèles.

2° Puisque l'on a

$$BGH + GHD = 2 \text{ dr. [hypothèse]}$$

et

$$AGH + BGH = 2 \text{ dr. [pr. 13]},$$

il en résulte [ax. 1 et 10]

$$AGH + BGH = BGH + GHD.$$

En retranchant BGH de part et d'autre, il reste [ax. 3]

$$AGH = GHD.$$

Donc [pr. 27] AB et CD sont parallèles (¹).

PROPOSITION 29.

Si deux droites parallèles AB, CD (*fig.* 29) *sont rencontrées par une troisième droite* EF, *elles feront avec celle-ci :* 1° *des angles alternes-internes égaux* AGH, GHD; 2° *des angles dirigés dans le même sens* (correspondants) *égaux* EGB, GHD; 3° *des angles intérieurs d'un même côté supplémentaires* BGH, GHD.

1° Si les angles AGH, GHD étaient inégaux, soit AGH > GHD. On aurait alors, en ajoutant de part et d'autre BGH [ax. 4],

$$AGH + BGH > BGH + GHD.$$

Or

$$AGH + BGH = 2 \text{ dr. [pr. 13]},$$

et par suite

$$BGH + GHD < 2 \text{ dr.}$$

(¹) Toutes les propositions établies jusqu'ici se démontrent sans le secours de l'axiome 11. On pourrait encore joindre à ces propositions le théorème démontré par Legendre, que *la somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut surpasser deux angles droits* (*voir* Note VI, p. 80). Les théorèmes qui suivent s'appuient sur l'axiome 11. Il est aisé, d'après cela, de se rendre compte de l'ordre dans lequel Euclide a rangé ses propositions. Il a voulu séparer nettement toutes celles qui sont indépendantes de l'axiome 11, et celles qui lui sont subordonnées, afin sans doute que les objections qui pourraient s'élever contre ce nouveau principe n'atteignissent que les théorèmes qui en dépendent *nécessairement,* les vingt-huit premières propositions restant hors de cause.

Il s'ensuivrait donc [ax. 11] que AB et CD, prolongées, se rencontreraient et ne seraient pas parallèles [déf. 35], ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, AGH et GHD ne peuvent être inégaux. Donc AGH = GHD.

2° Puisque l'on a

$$AGH + GHD \quad \text{et} \quad AGH = EGB \text{ [pr. 15]},$$

il en résulte

$$EGB = GHD.$$

3° Puisque EGB = GHD, on a, en ajoutant BGH de part et d'autre [ax. 2],

$$EGB + BGH = BGH + GHD.$$

Or

$$EGB + BGH = 2 \text{ dr. [pr. 13]}.$$

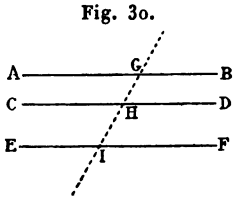
Donc aussi

$$BGH + GHD = 2 \text{ dr. } (^1).$$

PROPOSITION 30.

Deux droites AB, CD (*fig.* 30), *parallèles à une troisième* EF, *sont parallèles entre elles.*

Fig. 30.



Coupons ces trois droites par la droite GI. Puisque AB et EF sont parallèles, on a AGI = GIF [pr. 29]. De même, puisque CD et EF sont parallèles, on a GIF = GHD. Donc AGI = GHD, et par suite AB et CD sont parallèles [pr. 27].

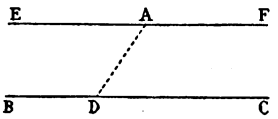
---

(1) Il eût été peut-être plus naturel de commencer par établir ce troisième cas, qui n'est qu'un autre énoncé de l'axiome 11, pour en déduire ensuite les deux autres.

PROPOSITION 31.

Par un point donné A (*fig.* 31) *mener une droite parallèle à une droite donnée* BC.

Fig. 31.

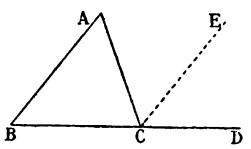


Sur BC prenons un point quelconque D, et menons AD. Construisons l'angle DAE = ADC [pr. 23], et prolongeons EA vers F. La ligne EF sera parallèle à BC [pr. 27] (¹).

PROPOSITION 32.

Si l'on prolonge un côté BC (*fig.* 32) *d'un triangle* ABC, 1° *l'angle extérieur ainsi formé* ACD *est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents* CAB, ABC; 2° *la somme des trois angles* ABC, BCA, CAB *du triangle est égale à deux angles droits.*

Fig. 32.



1° Par le point C, menons CE parallèle à AB [pr. 31]. Les parallèles AB, CE étant coupées par AC, on a [pr. 29, 1°] BAC = ACE. Ces mêmes parallèles étant coupées par BD, on a [pr. 29, 2°] ABC = ECD. Donc [ax. 2]

$$BAC + ABC = ACE + ECD = ACD.$$

(¹) Cette proposition aurait été mieux placée avant la proposition 29. (*Voir* la Note relative à la proposition 28.)

2° Puisque BAC + ABC = ACD, on a, en ajoutant ACB de part et d'autre [ax. 2],

$$BAC + ABC + ACB = ACD + ACB.$$

Or

$$ACD + ACB = 2 \text{ dr. [pr. 13}$$

Donc aussi

$$BAC + ABC + ACB = 2 \text{ dr}$$

EXPOSITION DES PREMIERS PRINCIPES

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

§ 1.

La Géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la *solidité* ou de l'*invariabilité* des figures [1].

Elle emprunte, en outre, à l'*expérience* un certain nombre de données que l'on appelle *axiomes*. — Nous verrons que les axiomes de la Géométrie peuvent se réduire à quatre.

§ 2.

On appelle *surface* la limite de deux portions de l'espace.

Nous nous élevons à l'idée abstraite de surface par la considération d'une enveloppe ou cloison matérielle, dont nous réduisons indéfiniment l'épaisseur.

La limite de deux portions de surface s'appelle *ligne*.

Deux surfaces qui se rencontrent se limitent réciproquement.

L'intersection de deux surfaces est donc une ligne.

On s'est élevé à l'idée abstraite de ligne, soit par la considération d'une tige très mince, soit par celle de la rencontre de deux cloisons, ou de la trace laissée sur la superficie d'un corps par le contact d'une autre surface.

La limite de deux portions de ligne s'appelle *point*.

Une ligne peut être limitée par sa rencontre avec une surface ou avec une autre ligne.

---

[1] *Voir* Note I.

Ainsi l'intersection de deux lignes ou d'une surface et d'une ligne est un point.

L'intersection de trois surfaces est aussi un point.

L'idée de point est venue de la considération d'un corps, dont les dimensions étaient indéfiniment réduites.

§ 3.

Nous avons défini les mots *surface, ligne, point,* en partant de l'idée de surface pour arriver jusqu'au point.

On peut suivre l'ordre inverse, en introduisant plus explicitement l'idée de mouvement ([1]).

On dira alors, en partant de l'idée de *point,* comme idée primitive, qu'une ligne est l'ensemble des positions occupées successivement dans l'espace par un point qui se meut.

De même, on peut considérer une surface comme l'ensemble des positions occupées successivement par une ligne qui se déplace, et qui en même temps peut changer de forme.

Toutes ces idées peuvent être rappelées par les représentations matérielles qui leur ont primitivement donné naissance.

§ 4.

L'étude des lignes et des surfaces constitue l'objet de la Géométrie.

On donne le nom de *figure* à un ensemble quelconque de points, de lignes ou de surfaces, considéré comme invariable de forme.

Axiome I. — *Trois points suffisent, en général, pour fixer dans l'espace la position d'une figure.*

§ 5.

L'expérience nous apprend cependant que, lorsqu'une figure se meut en tournant autour de deux de ses points, supposés fixes,

---

([1]) *Voir* Note II.

il y a un ensemble de points, situés sur une certaine ligne, qui restent immobiles pendant que les autres se déplacent.

Ces points sont disposés sur la route que suivrait un rayon lumineux pour passer de l'un des points fixes à l'autre (en supposant ces deux points situés dans un même milieu homogène).

La ligne qui contient tous ces points, et qui nous apparaît comme la trajectoire habituelle des rayons lumineux, s'appelle la *ligne droite*. Donc :

Axiome II. — *Il existe une ligne, appelée* LIGNE DROITE, *dont la position dans l'espace est complètement fixée par les positions de deux quelconques de ses points, et qui est telle que toute portion de cette ligne s'applique exactement sur une autre portion quelconque, dès que ces deux portions ont deux points communs* (1).

Ainsi, d'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite (2).

Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue, quelque loin qu'on les prolonge au delà de ces deux points.

En d'autres termes, on admet qu'une ligne droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens, et qu'elle ne peut l'être que d'une seule manière.

§ 6.

Si, en joignant deux points d'une surface par une ligne droite, la partie de la droite comprise entre ces deux points se trouve d'un certain côté de la surface, on dit que la surface est *concave* de ce côté, ou *convexe* du côté opposé.

L'expérience nous montre certaines surfaces, comme celle des eaux tranquilles, qui ne sont concaves d'aucun côté, et sur lesquelles une ligne droite, menée entre deux de leurs points, s'applique dans toute son étendue.

Une telle surface s'appelle une *surface plane* ou un *plan*.

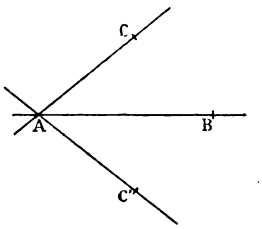
---

(1) *Voir* Note III.

(2) C'est, sous une autre forme, l'axiome 12 d'Euclide.

Soient A, B, C (*fig.* 33) trois points d'une surface plane. Si l'on joint le point C à un point quelconque A de la droite AB, la droite CA sera, ainsi que la droite AB, comprise tout entière

Fig. 33.



dans la surface. Si l'on fait mouvoir le point A tout le long de la droite AB, la ligne CA prendra une infinité de positions, qui par leur ensemble engendreront la surface.

Ainsi la surface plane peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une droite tournant autour d'un point fixe, et glissant le long d'une droite fixe qui ne passe pas par ce point.

Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points A et B, ou, ce qui revient au même, autour de la droite AB comme charnière, jusqu'à ce qu'un point C du plan, non situé sur la droite AB, vienne rencontrer l'ancienne position du plan en un point C', situé de l'autre côté de AB par rapport à C, l'ancienne position pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement de C'A le long de AB, et la nouvelle par le mouvement de CA le long de la même droite AB, il est clair que ces deux positions ne formeront qu'une seule et même surface, puisque leurs lignes génératrices coïncident dans chaque position; en sorte que la surface *retournée* coïncidera avec sa position primitive.

En général, si l'on donne à deux plans trois points communs, non en ligne droite, le même raisonnement fait voir que les deux plans coïncideront dans toute leur étendue. Donc :

Axiome III. — *Il existe une surface telle qu'une ligne droite, qui passe par deux quelconques de ses points, y est renfermée tout entière, et qu'une portion quelconque de cette surface peut être appliquée exactement sur la surface elle-même, soit directement, soit après qu'on l'a retournée, en lui faisant faire*

une demi-révolution autour de deux de ses points. Cette surface est le PLAN.

Par trois points non en ligne droite, ou par une droite et un point situé hors de cette droite, ou encore, par deux droites qui se coupent, on peut toujours faire passer un plan, et l'on n'en peut faire passer qu'un.

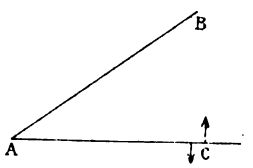
§ 7.

Lorsque deux droites se rencontrent, on dit qu'elles forment un *angle*.

On peut se représenter un angle comme la quantité plus ou moins grande dont il faut faire tourner une droite autour d'un de ses points pour la faire passer d'une position à une autre, en supposant que le mouvement s'accomplisse dans le plan mené par les deux positions.

On peut passer de la position AB (*fig.* 34) à la position AC, en

Fig. 34.



tournant dans un sens ou dans l'autre : l'angle décrit n'est pas généralement le même dans les deux cas.

§ 8.

Pour aller d'un point A à un autre point B, en suivant une ligne droite, il faut connaître : 1° la *direction* de cette droite; 2° la *longueur* de la portion de cette droite comprise entre les deux points.

Pour déterminer la direction d'une droite, on commence par imaginer un plan passant par les deux points A, B, et dans ce plan une droite fixe AC, menée par le point A. La direction de la droite AB sera connue, si l'on donne l'*angle* CAB qu'elle fait avec la droite fixe AC, c'est-à-dire la quantité dont il faut tourner,

dans le plan ABC, suivant un sens convenu, pour passer de la position AC à la position AB.

Si l'on donne ensuite la *distance* AB, c'est-à-dire la quantité dont on doit s'avancer sur la droite AB, on aura enfin la position du point B.

§ 9.

Il est facile de s'expliquer pourquoi l'on a pris la ligne droite pour mesurer les distances, le plan pour mesurer les angles.

1° C'est que d'abord, par deux points donnés, on peut toujours mener une ligne droite, de même que, par deux droites concourantes données, on peut toujours faire passer un plan. — Il pourrait n'en plus être de même si l'on prenait une ligne courbe ou une surface conique de forme donnée.

2° En second lieu, toute portion de ligne droite ou de plan peut être superposée à une ligne droite ou à un plan, de sorte que l'on peut constater immédiatement l'égalité ou l'inégalité de deux distances ou de deux angles.

§ 10.

Lorsqu'une droite, après avoir tourné toujours dans le même sens, revient à son ancienne position, on dit qu'elle a accompli un *tour* entier.

Lorsque la droite vient se placer sur son prolongement, on dit qu'elle a fait un *demi-tour*.

Lorsqu'elle s'arrête de manière à former avec sa première position et le prolongement de celle-ci deux angles égaux, elle a décrit un *quart de tour* ou *angle droit,* et sa nouvelle position est dite *perpendiculaire* à la première.

Le prolongement de la perpendiculaire est aussi une perpendiculaire.

La première droite est aussi perpendiculaire à la seconde.

Tous les angles droits sont égaux.

On a pris pour unité de mesure angulaire le quart de tour ou angle droit (1).

---

(1) *Voir* Note V.

§ 11.

On appelle *cercle* une ligne courbe tracée sur un plan, et dont tous les points sont à la même distance d'un point fixe, appelé *centre*.

Si l'on fait tourner une droite dans un plan autour d'un de ses points, chacun des autres points de la droite décrira dans ce mouvement un cercle.

La distance constante d'un point du cercle au centre s'appelle *rayon*.

Si l'on fait tourner un cercle dans son plan autour de son centre, le cercle ne cessera pas de coïncider avec lui-même.

Un *diamètre* est une droite passant par le centre, et terminée de part et d'autre au cercle.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour de son centre et dans son plan, de telle sorte qu'un diamètre donné revienne coïncider avec son ancienne position, on voit que l'une des deux parties du cercle viendra coïncider avec l'autre. Donc un diamètre divise le cercle et la portion de plan qu'il entoure, chacun, en deux parties égales.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour d'un de ses diamètres, jusqu'à ce que son plan revienne coïncider, *par retournement,* avec son ancienne position, le cercle coïncidera encore avec lui-même, ce qui montre que les deux moitiés du cercle peuvent se superposer de deux manières différentes.

Deux cercles de même rayon coïncident nécessairement, dès que l'on fait coïncider leurs plans et leurs centres.

§ 12.

Tandis qu'une droite tourne autour d'un de ses points, supposé fixe, considérons le cercle décrit par un quelconque des points mobiles de la droite.

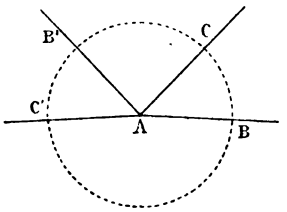
Pendant que la droite accomplit un tour entier, elle parcourt le cercle entier.

Lorsqu'elle fait un demi-tour, elle parcourt le demi-cercle.

Si on la fait tourner d'angles égaux à partir de deux posi-

tions AB, AB′ (*fig.* 35), les arcs décrits BC, B′C′ seront égaux. — Car, si l'on fait tourner le cercle autour de son centre jusqu'à ce que AB′ vienne se placer sur AB, l'égalité des angles fait voir

Fig. 35.



que AC′ tombera sur AC, et par suite les arcs BC, B′C′ devront coïncider.

Si un angle est égal à la somme ou à la différence de deux autres, l'arc correspondant au premier angle sera égal à la somme ou à la différence des arcs correspondants aux deux autres angles.

De là résulte que :

1° Un angle droit comprend entre ses côtés un quart de cercle ou *quadrant;*

2° Si un angle est multiplié par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est multiplié par le même nombre entier;

3° Si un angle est divisé par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est divisé par le même nombre entier;

4° Si deux angles ont entre eux un rapport quelconque, les arcs correspondants ont entre eux le même rapport.

Donc l'arc compris entre les côtés d'un angle varie proportionnellement à cet angle ([1]).

Si l'on veut donc comparer un angle à son unité, pour arriver à sa représentation numérique, il revient au même de comparer l'arc correspondant à cet angle avec l'arc correspondant à l'unité d'angle, et que l'on prend naturellement pour unité d'arc.

([1] En d'autres termes, si l'on prend pour unité d'arc l'arc correspondant à l'unité d'angle, en exécutant les opérations nécessaires pour l'évaluation numérique de l'angle, on se trouvera exécuter en même temps les opérations qui conduisent à l'évaluation numérique de l'arc, et l'on arrivera de part et d'autre au même résultat.

L'unité d'angle étant l'angle droit, l'unité d'arc sera le quadrant.

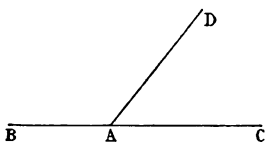
On exprime cette correspondance en disant qu'un *angle au centre* a pour *mesure* l'arc compris entre ses côtés.

L'avantage de la substitution des arcs de cercle aux angles consiste à offrir une représentation plus facile à saisir, et à faciliter les opérations graphiques que l'on doit exécuter sur les angles.

§ 13.

Une droite AD (*fig.* 36), qui en rencontre une autre, fait avec les deux parties AB, AC de celle-ci deux angles dont la somme est l'angle CAB = un demi-tour ou deux angles droits.

Fig. 36.



Ces deux angles sont dits *supplémentaires,* et chacun d'eux est le *supplément* de l'autre.

Si l'on ajoute deux angles supplémentaires, il est clair que leurs côtés non communs seront en ligne droite.

Si deux droites se traversent mutuellement, les angles opposés par le sommet sont égaux, comme ayant même supplément. — On pourrait encore démontrer cette égalité, en retournant la figure de manière que chacun des côtés de l'angle supplémentaire commun vînt coïncider avec l'ancienne position de l'autre côté, auquel cas les deux angles en question seraient amenés à coïncider (1).

On peut encore énoncer la même proposition, en disant que les deux arcs de cercle compris entre deux rayons et entre les prolongements de ces rayons sont égaux entre eux.

(1) Nous ferons un continuel usage de ce procédé de *retournement* toutes les fois qu'il s'agira de démontrer l'égalité de deux parties d'une même figure. On peut présenter ce procédé autrement, en concevant que l'on plie en deux la figure autour de son axe de symétrie, qui est ici la bissectrice de l'angle supplémentaire.

§ 14.

Deux droites quelconques, rencontrées par une troisième, forment avec celle-ci huit angles, égaux deux à deux et supplémentaires deux à deux, et auxquels, pour les désigner plus facilement, on a donné les noms de *correspondants*, d'*alternes-internes*, d'*internes d'un même côté*, etc.

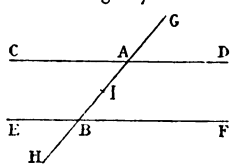
Si l'on suppose qu'une quelconque des cinq relations suivantes ait lieu :

1° Angles correspondants
2° ..... alternes-internes } égaux,
3° ..... alternes-externes
4° Angles internes d'un même côté
5° ..... externes..... } supplémentaires,

les quatre autres relations ont nécessairement lieu.

Lorsque ces cinq relations existent, les droites CD, EF ne peuvent avoir aucun point commun (*fig.* 37). Concevons, en effet,

Fig. 37.



que la moitié de gauche de la figure soit rendue mobile, et qu'on lui fasse faire un demi-tour, dans son plan, autour du milieu I de la droite AB. Lorsque le point A sera arrivé en B et le point B en A, on voit aisément que les deux moitiés de la figure coïncideront dans tous leurs points, quelque loin que l'on suppose les droites prolongées. Il ne saurait donc y avoir un point de concours des droites dans une des moitiés de la figure, sans qu'il en existât un autre dans l'autre moitié; et comme l'existence simultanée de deux points de rencontre est contraire à la nature de la ligne droite, il s'ensuit que les deux droites n'ont aucun point commun.

Donc, si l'on fait glisser un angle, de grandeur invariable, le long d'un de ses côtés, supposé fixe, le côté mobile se détache en-

tièrement de son ancienne position, et ne conserve plus avec elle aucun point commun.

Deux droites situées dans le même plan, et ne pouvant se rencontrer, si loin qu'on les prolonge l'une et l'autre, sont dites *parallèles*.

Ainsi deux droites qui forment avec une troisième des angles satisfaisant à l'une des cinq conditions ci-dessus sont parallèles.

En particulier, deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

En d'autres termes, par un point donné hors d'une droite, on ne peut pas mener plus d'une perpendiculaire à cette droite.

Il résulte de ce que nous venons de dire que, par un point pris hors d'une droite, on peut toujours mener une parallèle à cette droite ([1]).

§ 15.

La parallèle étant menée, si on la fait tourner tant soit peu autour de l'un de ses points, elle finira par atteindre la première ligne, lorsqu'on les prolongera suffisamment l'une et l'autre; de sorte que la position de parallélisme est *unique*.

C'est là un nouveau principe, qui n'est pas renfermé dans les axiomes précédents, et que nous énoncerons ainsi :

Axiome IV. — *Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

Il résulte de là que :

1° Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles;

2° Deux droites parallèles étant rencontrées par une sécante, les angles formés satisfont aux cinq relations du paragraphe précédent.

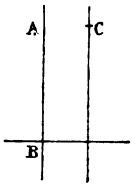
En particulier, toute perpendiculaire à l'une des parallèles est perpendiculaire à l'autre.

Donc, par un point donné hors d'une droite, on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite. Car, si AB (*fig.* 38)

([1]) *Voir* Note VII.

est une perpendiculaire menée à la droite donnée en un quelconque de ses points, la parallèle à AB, menée par le point donné C,

Fig. 38.



sera la perpendiculaire demandée. Nous avons d'ailleurs vu, dans le paragraphe précédent, que cette perpendiculaire est la seule qui puisse être abaissée du point C sur la droite donnée.

§ 16.

Deux angles qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens sont égaux. On le voit en les comparant à l'angle formé par l'intersection de leurs côtés prolongés.

Réciproquement, deux angles étant égaux et leurs côtés dirigés dans le même sens, si leurs premiers côtés sont parallèles, leurs seconds côtés seront aussi parallèles.

Il résulte de là que, étant donné un système quelconque de droites, si l'on transporte ce système dans son plan, de manière qu'une des droites du système reste constamment parallèle à son ancienne position, chacune des autres droites restera également parallèle à son ancienne position.

On dit, dans ce cas, que le système a subi un *mouvement de translation parallèlement à lui-même.*

Plus généralement, si les deux côtés d'un angle tournent, dans le même sens, chacun d'une même quantité angulaire, autour de deux quelconques de leurs points, la grandeur de l'angle n'aura pas changé. Et réciproquement, si l'on transporte un angle dans son plan, sans le retourner, chacun des côtés de l'angle fera le même angle avec son ancienne position.

En particulier, deux angles qui ont les côtés perpendiculaires, chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.

Si l'on fait tourner un système de droites dans un plan, autour

d'un point quelconque qui lui soit invariablement lié, toutes les droites feront avec leurs anciennes positions respectives des angles égaux, dont la valeur commune est dite l'*angle de rotation* du système.

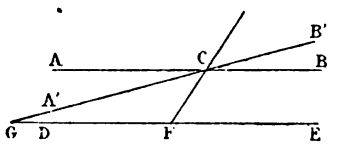
§ 17.

Deux droites concourantes forment avec une troisième des angles alternes-internes inégaux, dont le plus petit est celui qui est dirigé vers le point de concours.

En d'autres termes, si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur ainsi formé est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

Cette proposition est presque évidente, si l'on s'appuie sur l'axiome IV. En effet, si, de la position de parallélisme, on fait passer la droite AB (*fig.* 39) à la position A'B', en la faisant tour-

Fig. 39.



ner autour du point C, de manière qu'elle rencontre la droite DE en G, il est clair que, dans ce mouvement, l'angle BCF aura augmenté, tandis que son alterne-interne CFD sera resté constant. Donc, puisqu'on avait, avant le mouvement, BCF = CFD, on aura, après le mouvement, B'CF > CFD. De même, A'CF < CFE.

On voit en même temps que la valeur commune des différences B'CF — CFD, CFE — A'CF est égale à l'angle G que font entre elles les droites A'B' et DE. Donc l'angle extérieur, formé par le prolongement d'un côté d'un triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents, et la somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

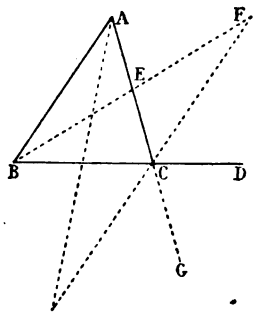
§ 18.

Si la manière précédente d'établir le théorème sur l'inégalité des angles alternes-internes formés par des droites concourantes est la plus directe et la plus simple, on ne peut nier cependant qu'elle

ne s'appuie sur un axiome dont ce théorème ne dépend pas nécessairement, et il semble alors plus logique de l'établir sans le secours de cet axiome. C'est ce qu'a fait Euclide [pr. 16], et sa démonstration peut être présentée comme il suit :

Soit ABC (*fig.* 40) le triangle donné. Je dis que l'angle ACD est plus grand que son alterne-interne BAC. En effet, joignons

Fig. 40.



B au milieu E de la droite AC, et faisons tourner le triangle EBA autour du point E, jusqu'à ce que EA vienne s'appliquer sur son prolongement EC, et par suite le point A sur le point C. L'autre côté EB de l'angle BEA viendra s'appliquer sur son prolongement. La ligne BA partira donc du point C pour aller rencontrer BEF dans l'intérieur de l'angle ACD. Donc l'angle ECF ou BAE sera contenu dans l'angle ACD. Donc enfin l'angle A est moindre que son alterne-interne ACD.

Par la même raison, les deux droites AB, AC étant coupées par BC, l'angle ABC sera moindre que son alterne-interne BCG, ou que son correspondant ACD = BCG.

Donc l'angle extérieur ACD est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

En d'autres termes, dans un triangle, chaque angle est moindre que le supplément de l'un quelconque des deux autres.

Donc la somme de deux quelconques des angles d'un triangle est moindre que deux angles droits.

Tout triangle a au moins deux angles aigus.

Deux droites partant d'un même point ne peuvent avoir une perpendiculaire commune.

Si l'on mène, d'un même point à une droite donnée, une perpendiculaire et une oblique, l'oblique fera un angle aigu avec la partie de la droite qui va du pied de l'oblique au pied de la perpendiculaire.

§ 19.

Après avoir établi ces inégalités indépendamment du *quatrième axiome,* on démontrera, comme Euclide [pr. 32], les théorèmes d'égalité fondés sur cet axiome.

Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur est égal à la somme des deux intérieurs non adjacents.

La somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

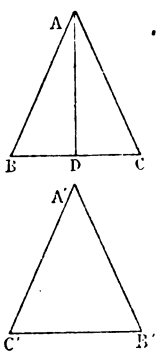
Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Deux angles d'un triangle, étant donnés, déterminent le troisième.

§ 20.

Du triangle isoscèle. — Soit ABC (*fig.* 41) un triangle isoscèle, dans lequel AB = AC. Retournons le plan de ce triangle,

Fig. 41.



en lui faisant faire une demi-révolution autour de la bissectrice AD de l'angle A; ou, ce qui revient au même, plions la figure en deux, en faisant tourner une des moitiés autour de AD

comme charnière. On voit alors que les deux moitiés de la figure se recouvrent parfaitement.

Si l'on ne veut pas d'abord introduire la bissectrice, on commencera par faire voir que le triangle retourné A'B'C' peut se placer sur sa première position ABC. Alors la bissectrice de l'angle C'B'A' coïncide avec celle de l'angle BAC, le milieu de C'B' avec le milieu de BC, etc. Donc :

Théorème. — Dans un triangle isoscèle : 1° les angles opposés aux côtés égaux sont égaux; 2° la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base; 3° elle partage cette base en deux parties égales.

Autre énoncé. — Si d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite une perpendiculaire et deux obliques égales entre elles : 1° ces obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire; 2° elles sont également inclinées sur la perpendiculaire; 3° elles sont également inclinées sur la base donnée.

Donc tout point à égale distance des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.

Si donc chacun des deux points A et B de la droite AB (*fig.* 43) est équidistant des extrémités C et C' de la droite CC', AB sera perpendiculaire sur le milieu de CC'.

Autre énoncé. — Si l'on joint, dans un cercle, le centre aux deux extrémités d'une corde : 1° les deux rayons feront avec la corde des angles égaux; 2° la bissectrice de l'angle des deux rayons (laquelle est aussi la bissectrice de l'arc) est perpendiculaire à la corde; 3° elle partage cette corde en deux parties égales.

Donc, si deux cercles ont deux points communs, la ligne des centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

Remarque. — La bissectrice de l'angle A (*fig.* 41) satisfait à quatre conditions :

1° Elle passe au point A;

2° Elle partage l'angle A en deux parties égales;

3° Elle passe au milieu D de BC;

4° Elle est perpendiculaire à BC.

Or deux de ces quatre conditions, combinées convenablement, déterminent complètement la droite AD. De là résultent autant

de réciproques du théorème précédent. Ainsi, dans un triangle isoscèle :

La droite qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire à cette base, et bissectrice de l'angle au sommet;

La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base partage cette base et l'angle au sommet, chacun en deux parties égales;

La perpendiculaire élevée sur le milieu de la base passe au sommet, et partage l'angle au sommet en deux parties égales.

On peut énoncer encore ces réciproques comme il suit :

Dans un cercle, la droite qui joint le centre au milieu d'une corde est perpendiculaire à la corde et bissectrice de l'arc;

La perpendiculaire abaissée du centre sur une corde est bissectrice de la corde et de l'arc;

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc.

§ 21.

Considérons maintenant un triangle qui a deux angles égaux, ces deux angles étant nécessairement aigus.

En retournant le triangle et l'appliquant sur son ancienne position; ou encore, en pliant la figure autour de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base [1], on voit que les deux moitiés de la figure coïncident l'une avec l'autre; par conséquent, le *triangle est isoscèle.*

Autre énoncé. — Deux obliques également inclinées sur la base sont égales, et par suite s'écartent également du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Si deux droites, coupées par une troisième, forment avec celle-ci des angles $\left\{\begin{array}{l}\text{internes}\\ \text{externes}\end{array}\right\}$ d'un même côté égaux, ou des angles $\left\{\begin{array}{l}\text{correspondants}\\ \text{alternes-internes}\\ \text{alternes-externes}\end{array}\right\}$ supplémentaires, les trois droites forment un triangle isoscèle.

---

[1] Cette perpendiculaire rencontre les deux côtés *au-dessus* de la base (axiome IV et corollaires).

Dans ce cas, on désigne souvent les deux premières droites sous le nom d'*anti-parallèles* par rapport à la troisième.

§ 22.

Soit enfin un triangle, dans lequel le sommet se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de la base.

En retournant la figure, ou en la pliant autour de la perpendiculaire, on voit que le *triangle est isoscèle.*

Ainsi un triangle dans lequel la perpendiculaire élevée au milieu de la base passe par le sommet est isoscèle.

Autre énoncé. — Tout point de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est équidistant des deux extrémités de cette droite.

Autre énoncé. — Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales.

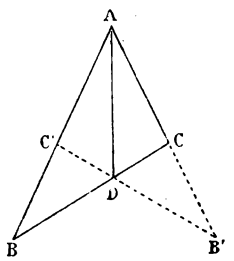
De cette proposition, jointe à sa réciproque du § 20, il résulte que la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités de cette droite.

En d'autres termes, c'est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par les extrémités de la droite.

§ 23.

Inégalités dans un triangle quelconque. — Si deux côtés AB,

Fig. 42.



AC (*fig.* 42) d'un triangle sont inégaux, au plus grand côté AB est opposé un plus grand angle C. (Voir *Euclide,* I, 18.)

Autrement, en retournant le triangle et le placant sur son ancienne position (ou, ce qui revient au même, en pliant le triangle autour de la bissectrice AD de l'angle au sommet), on forme le triangle BDC′, dans lequel l'angle AC′D, extérieur au triangle, est plus grand que l'angle intérieur non adjacent B.

Réciproquement, si deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté. (*Euclide*, I, 19.)

§ 24.

Dans un triangle, un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres. (*Euclide*, I, 20.)

Il s'ensuit que, dans un triangle, un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.

Corollaires. — Dans un polygone, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.

En d'autres termes, une ligne droite est plus courte qu'une ligne polygonale ayant les mêmes extrémités.

Un contour polygonal convexe est plus court qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe en aboutissant aux mêmes extrémités.

Un contour polygonal fermé et convexe est moindre qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe de toutes parts [1].

§ 25.

Si d'un point on mène à une droite une perpendiculaire et diverses obliques :

1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;

2° Si deux obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus longue.

Autre énoncé. — Si la hauteur d'un triangle ne tombe pas au milieu de la base, au plus grand segment est adjacent un plus grand côté.

---

[1] Pour la comparaison des longueurs curvilignes aux longueurs rectilignes, *voir* Note VIII.

Pour démontrer cette proposition , si les obliques sont de côtés différents de la perpendiculaire, on compare l'une d'elles à une oblique égale à l'autre et menée du même côté de la perpendiculaire que la première. Le triangle formé par les deux obliques a alors un angle obtus, opposé à l'oblique la plus éloignée; donc celle-ci est la plus longue.

On peut encore énoncer cette proposition ainsi :

Tout point hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est plus rapproché de celle des deux extrémités de la droite qui est située du même côté que lui par rapport à la perpendiculaire.

§ 26.

Réciproquement, dans un triangle non isoscèle, la *hauteur* est plus rapprochée du petit côté.

Autre énoncé. — De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Tout point inégalement distant des deux extrémités d'une droite est hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite, et il est du même côté de cette perpendiculaire que celle des extrémités de la droite dont il est le plus rapproché.

§ 27.

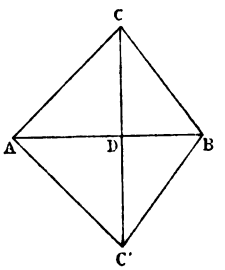
Cas d'égalité des triangles. — 1° Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. (*Euclide*, I, 4.)

2° Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. La démonstration donnée par Legendre (liv. I, pr. VII) est plus simple que celle d'Euclide (I, 26, Ier cas) (1).

(1) Dans le IIe cas, où le côté égal est *opposé* à l'un des angles égaux, la démonstration d'Euclide a l'avantage d'être indépendante de l'axiome des parallèles.

3° Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun. — Adossons les deux triangles (*fig.* 43) de manière que leurs sommets C, C′ se trouvent de côtés différents de la base commune AB. Chacun des points A, B étant équidistant des points C et C′, la ligne AB est perpendiculaire sur le milieu de CC′. Si donc on replie la figure autour de AB, le point C′ tombera en C.

Fig. 43.



Autrement, la perpendiculaire AB sur la base du triangle isoscèle ACC′ étant bissectrice de l'angle au sommet, on a CAB = BAC′, ce qui ramène au premier cas d'égalité.

On peut dire encore que, les triangles CAC′, CBC′ étant isoscèles, on a l'angle ACC′ = AC′C, l'angle BCC′ = BC′C, d'où ACC′ ± BCC′ = AC′C ± BC′C, c'est-à-dire ACB = AC′B, etc.

§ 28.

Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés de même nom égaux chacun à chacun.

1° Si ce sont les deux côtés de l'angle droit, on est dans le premier cas du paragraphe précédent.

2° Si ce sont l'hypoténuse et un autre côté, on adosse les deux triangles rectangles de manière à former un triangle isoscèle, que sa *hauteur* partage en deux triangles égaux.

Cette dernière proposition est un cas particulier de la suivante :

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal.

§ 29.

Si deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, au plus grand angle est opposé un plus grand côté. (*Euclide,* I, 24.)

Réciproquement, si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et le troisième inégal, au plus grand côté est opposé un plus grand angle. (*Euclide*, I, 25.)

APPENDICE.

NOTE I.

Du rôle de l'expérience dans les Sciences exactes.

I

La plupart des phénomènes qui se passent sous nos yeux ne sont pas susceptibles d'une détermination *exacte*, et, lorsqu'ils se reproduisent, nous n'avons aucun moyen de nous assurer de leur parfaite identité. Il en est cependant — et ce sont naturellement les plus simples — pour lesquels la détermination est possible avec une approximation et une précision assez grandes pour que l'incertitude que nous laissons subsister soit pour nous sans inconvénient.

Quand la comparaison exacte est possible, on peut procéder à l'étude des lois de la transformation d'un phénomène dans un autre, et si ces lois sont assez simples pour que nous réussissions à les reconnaître, leur ensemble constituera l'objet d'une *science exacte*.

La construction d'une telle science se compose essentiellement de deux parties distinctes : l'une, qui est fondée sur l'observation et l'expérience, consiste à rassembler des faits et à en conclure par induction les lois et les principes qui serviront de base à la science; l'autre, qui n'est qu'une branche de la Logique générale, s'occupe de combiner ces principes fondamentaux, de manière à déduire la représentation des faits observés et à prédire en outre des faits nouveaux.

L'observation des faits ne peut, en général, avoir lieu avec une rigoureuse exactitude, et n'est jamais complète. Rien ne peut donc nous garantir *a priori* que les lois fournies par l'induction seront toutes vraies, ni qu'elles seront suffisantes.

On reconnaîtra leur fausseté lorsque, combinées par les procédés logiques, elles aboutiront à des conséquences contradictoires, ou lorsque les faits nouveaux qu'elles conduiraient à prévoir seront en désaccord avec la réalité objective.

Il peut se faire, d'autre part, que les lois admises ne soient pas toutes

distinctes et indépendantes les unes des autres, et que quelques-unes d'entre elles fassent partie des conséquences que l'on peut tirer de la combinaison des autres.

On voit ainsi quel est le rôle, dans l'établissement des principes, de la partie de la science qui s'occupe de leur combinaison, abstraction faite de leur origine expérimentale et des rapports de leurs conséquences avec les faits réels. C'est elle qui doit constater d'abord si les principes sont compatibles entre eux, et ensuite s'ils sont irréductibles à un moindre nombre. Une science fondée sur des principes qui satisfont à ces conditions est absolument vraie, au point de vue rationnel et abstrait, quand même elle ne se trouverait pas conforme aux faits réels qu'elle était destinée à représenter. C'est, dans ce cas, à la partie expérimentale et inductive qu'il faut s'en prendre; ce sont les hypothèses fondamentales qu'il faut changer. La partie purement logique, quoique devenue inutile, était irréprochable.

Cette partie logique des sciences exactes constitue ce qu'on appelle les *Mathématiques* proprement dites. Celles-ci se divisent à leur tour en *Mathématiques pures,* contenant les théories logiques applicables à l'étude de toutes les classes de faits indistinctement, et en *Mathématiques appliquées,* traitant de l'application de ces théories générales à des classes particulières de faits, et des procédés spéciaux qui s'adaptent le mieux à chacune de ces classes.

II.

On donne le nom d'*opération* à l'acte qui transforme un phénomène dans un autre, de sorte qu'à une succession de phénomènes correspond une combinaison d'opérations.

Pour appliquer la Logique à la combinaison des opérations, il n'est nullement nécessaire de connaître leur sens réel et la manière dont elles s'exécutent. Il suffit d'avoir constaté certaines propriétés abstraites de ces opérations, auxquelles on pourrait donner le nom de *propriétés combinatoires* (1).

On peut construire une théorie abstraite des opérations fondée uniquement sur la considération de ces propriétés, et comprenant ainsi comme cas particulier l'Algèbre ordinaire.

Un nombre étant la loi de formation d'une quantité par l'addition d'unités

---

(1) Pour en donner un exemple, la théorie de la multiplication algébrique repose tout entière sur les propriétés exprimées par les égalités suivantes :

1° Pour $a = a'$, $b = b'$, on a $a.b = a'.b'$ (*uniformité*);

2° $(a + b).c = a.c + b.c$ (propriété *distributive*);

3° $a.b = b.a$ (propriété *commutative*);

4° $(a.b).c = a.(b.c)$ (propriété *associative*);

5° $a \times 0 = 0$;

6° $a \times 1 = a$.

égales, l'Arithmétique n'est autre chose que la théorie abstraite de la combinaison de cette sorte d'opérations.

Les opérations peuvent être simples, comme le sont les opérations fondamentales de l'Algèbre; elles jouissent alors de propriétés simples, et la théorie de leur combinaison peut recevoir un grand développement. D'autres fois, elles sont d'une nature plus complexe : telles sont les constructions géométriques, dont la combinaison se fait le plus souvent d'après des lois spéciales pour chaque cas particulier, sans qu'on puisse la soumettre à des procédés généraux.

Les opérations complexes peuvent généralement se ramener aux opérations simples. C'est cette décomposition d'opérations dans leurs éléments qui caractérise les théories dites *analytiques* (Géométrie analytique, Mécanique analytique, etc.). On donne le nom de *synthétiques* aux théories où l'on emploie immédiatement les opérations complexes.

La différence essentielle entre les théories analytiques et les théories synthétiques tient ainsi à ce que, dans les premières, les opérations ont des propriétés simples, qui permettent d'établir des procédés généraux pour leur combinaison, et fournissent des méthodes régulières et directes pour la solution des problèmes. Dans les théories synthétiques, au contraire, la complication et la variété plus grandes des opérations s'opposent à la formation de règles simples pour leur application, et la solution, tout en exigeant moins d'intermédiaires, est d'ordinaire le résultat d'un tâtonnement, que l'exercice, bien plus que les méthodes générales, peut mettre en mesure d'abréger.

III.

Les grandeurs se divisent en grandeurs *discrètes* ou *numériques*, et en grandeurs *concrètes* ou *continues*.

Les grandeurs discrètes se composent d'individus considérés comme identiques par rapport à la propriété d'après laquelle est dénommée l'espèce de l'*unité*, qui est aussi l'espèce de la quantité. La quantité se forme par la *répétition* ou *multiplication* de l'unité. La loi qui préside à cette opération s'appelle un *nombre*. Une quantité discrète est complètement connue quand on donne son espèce et son nombre.

La théorie mathématique des quantités discrètes ne s'occupe que des nombres qui les représentent, indépendamment de leur espèce. Les nombres pouvant être définis et comparés avec une exactitude parfaite, leur théorie se présente immédiatement avec toute sa rigueur, et l'Arithmétique des nombres entiers forme la branche la plus simple des Mathématiques pures.

Nous n'entreprendrons pas ici d'examiner quelle a été la part de l'expérience dans la formation de l'Arithmétique, tant élémentaire que supérieure. Nous remarquerons seulement que, si l'expérience, c'est-à-dire l'examen des résultats obtenus en calculant sur des exemples particuliers, a été souvent un auxiliaire puissant dans la recherche, par induction, des propriétés des nombres les plus cachées, elle joue toutefois, comme

base des principes et des démonstrations, un rôle des plus restreints, si même elle y intervient en quoi que ce soit.

Les quantités concrètes se forment par accroissement continu (par addition). Elles sont considérées comme étant de même nature dans toutes leurs parties, relativement aux propriétés qu'exprime leur dénomination.

Celles que nous avons sous les yeux ne sont pas susceptibles d'être définies et comparées avec une complète exactitude, comme l'étaient les quantités discrètes, et cela tient à la fois à l'indécision de leurs limites et à l'imperfection de nos sens et de nos moyens d'observation. On ne peut donc les soumettre directement à une théorie mathématique, et l'on est forcé de remplacer leur étude par celle de grandeurs idéales, définies par les propriétés dont nos moyens de mesure plus ou moins grossiers nous permettent de constater approximativement l'existence dans les objets matériels.

Ainsi l'étude de l'étendue des corps réels, dont la forme ne peut être parfaitement définie ni parfaitement observée, doit être précédée de l'étude abstraite de corps idéaux, de formes rigoureusement déterminées à l'aide de procédés de mesure complètement exacts, et cette dernière étude se ramène elle-même à celle de figures privées d'une ou de deux de leurs dimensions, et finalement à la considération du point privé de toute étendue.

De même, la science du mouvement physique prend pour base, ou, si l'on veut, pour canevas, la Mécanique abstraite, qui aux hypothèses de la Géométrie en ajoute certaines autres, suggérées plus ou moins directement par l'expérience; elle opère ainsi sur des corps géométriques, aux propriétés desquels elle ajoute l'idée de *masse*, et qui sont soumis à des causes de mouvement appelées *forces*, définies par l'effet qu'elles produisent ou tendent à produire en vertu des lois admises. Aux diverses branches de la Physique des corps réels correspondent des branches spéciales de la Mécanique abstraite, appuyées sur de nouvelles hypothèses, que l'on choisit de manière à pouvoir les traiter par les méthodes mathématiques, et à en déduire des résultats aussi voisins que possible des phénomènes que l'on veut représenter.

Il importe essentiellement, dans ces sciences rationnelles et abstraites, de distinguer les hypothèses, considérées en elles-mêmes, lesquelles sont *a priori* essentiellement arbitraires, à la seule condition de n'être pas contradictoires entre elles, de la valeur de ces hypothèses, considérées au point de vue des applications. Toute science abstraite, fondée sur des hypothèses non contradictoires et développée conformément aux règles de la logique, est en elle-même *absolument vraie*. Mais elle peut bien n'avoir aucun rapport avec les phénomènes naturels, et se trouver fausse lorsqu'on l'examine au point de vue de la réalité physique. C'est ce qui arrive quand les hypothèses ont été choisies d'une manière erronée ou incomplète, soit par suite d'une induction fondée sur des observations trop inexactes ou trop restreintes, soit par suite de simplifications illégitimes que l'on aura introduites pour faciliter l'étude mathématique.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces considérations générales,

et nous nous bornerons à en développer les applications à la plus simple des sciences physiques : l'étude des corps sous le rapport de l'étendue, ou la *Géométrie*.

IV.

Au point de vue de l'étendue, un corps ne se distingue d'un autre que par ses limites. C'est donc sur les limites des corps que devra porter exclusivement l'étude de l'étendue. Deux corps qui ont les mêmes limites sont identiques au point de vue géométrique.

De même que l'on connaîtrait la forme d'un corps matériel, si l'on pouvait en détacher, sans la déformer, l'enveloppe qui le contient, on supposera le corps idéal entouré d'une enveloppe sans épaisseur, et la matière du corps retirée de cette enveloppe ou anéantie. C'est cette enveloppe ou *surface* qui constituera, à proprement parler, le corps géométrique. Pareillement, l'étude d'une portion de surface se ramènera à celle des limites de ses parties, ou des *lignes*, l'étude des lignes à celle de leurs limites, ou des *points*.

La Géométrie est fondée avant tout sur l'hypothèse de l'existence d'un espace *immobile* et *indéfini*, dans lequel on peut conserver l'indication du lieu occupé à un instant donné par un corps, et où les corps géométriques peuvent se déplacer en gardant identiquement les propriétés qui correspondent à la notion physique de solidité. On admet que deux corps solides, qui ont pu tour à tour coïncider avec un troisième, sont susceptibles de coïncider entre eux, dans quelque partie de l'espace qu'on les transporte l'un et l'autre.

La propriété de l'invariabilité des figures, que nous avons prise comme point de départ, ne peut, non plus que celle de l'immobilité de l'espace, admettre une définition rigoureuse. L'idée d'invariabilité de forme nous vient de l'expérience. Nous ne pouvons, en effet, observer que des changements relatifs de figure et des déplacements relatifs. Tout ce que nous affirmons relativement à l'identité absolue de lieu et de forme est uniquement fondé sur l'identité de nos sensations.

Après avoir acquis l'idée de grandeur ou d'étendue par la considération du mouvement (voir la Note suivante), nous constatons que certains corps, ceux surtout qui offrent au toucher le plus de résistance, nous présentent toujours, de quelque manière qu'on les déplace, des dimensions et des configurations que nous jugeons être les mêmes, c'est-à-dire qui, appréciées d'après le mouvement de l'œil, en tenant compte de la distance, nous causent des impressions toujours identiques. Nous donnons à ces corps le nom de *corps solides*.

L'hypothèse de l'invariabilité de figure ne peut, par conséquent, être assise sur des expériences susceptibles d'une approximation indéfinie et présentant une certitude objective. Nous l'acceptons, parce qu'elle nous semble plus conforme à nos impressions physiologiques, et qu'elle explique de la manière la plus simple les phénomènes qui affectent nos sens.

Cette hypothèse n'a pas besoin d'être admise tout d'abord dans son entière généralité, et l'étude de la Géométrie montre que son ensemble découle comme conséquence de certains cas particuliers convenablement choisis.

La notion d'invariabilité de forme étant admise, c'est l'expérience qui nous suggère celle de la possibilité du transport d'un corps invariable dans l'espace tel que nous le connaissons, absolument comme une figure plane ou sphérique peut être déplacée sur le plan ou sur la sphère sans changer de forme. Mais il ne serait pas absurde *a priori* de supposer l'existence d'un espace dans lequel ce transport serait impossible sans une déformation plus ou moins profonde, exactement comme cela a lieu pour une figure tracée sur un cône ou sur un ellipsoïde.

Une autre notion essentiellement expérimentale, c'est la distinction entre la droite et la gauche, sans laquelle il serait impossible de définir indépendamment l'une de l'autre deux rotations effectuées autour d'un même axe dans des sens opposés. Cette notion ne peut évidemment s'expliquer qu'en la rapportant à notre propre corps.

L'expérience nous apprend ensuite qu'un corps matériel, fixé par un seul de ses points, peut prendre une infinité de positions différentes.

Il en est de même aussi d'un corps fixé par deux de ses points; seulement, dans ce cas, la liberté du mouvement est plus restreinte.

De plus, en continuant ce mouvement dans le même sens, le corps finira par reprendre exactement sa position primitive.

On constate ensuite que, lorsqu'un corps tourne autour de deux de ses points, il y a, outre ces deux points, une suite continue d'autres points, en nombre infini, qui restent immobiles pendant le mouvement du corps. Cette suite s'étend, non seulement entre les deux points fixes, mais encore au delà, dans les deux sens, quelque loin que le corps soit prolongé. Elle forme une ligne se prolongeant indéfiniment des deux côtés, et à laquelle on donne le nom de *ligne droite*.

De ce mode de génération il résulte que deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue. En d'autres termes, par deux points donnés on peut donc mener une ligne droite, et une seule (1).

Si, enfin, on fixe trois points d'un corps, le corps cesse d'être mobile, à moins que ces trois points ne se trouvent en ligne droite.

L'expérience fait naître en nous l'idée d'une surface superposable à elle-même par retournement, et par suite comprenant tout entière une ligne droite avec laquelle elle a deux points communs. Cette surface est le *plan*.

Telles sont les principales hypothèses sur lesquelles s'appuient les vingt-huit premières propositions d'Euclide, et qui conduisent à la démonstration de l'existence des parallèles. On pourrait poursuivre l'étude de la Géométrie sans admettre d'hypothèse nouvelle, et les travaux de Lobatchefsky et de J. Bolyai ont fait voir que les précédentes suffisent à elles

---

(1) Lobatchefsky et W. Bolyai ont essayé de se passer de cet axiome de la ligne droite, en démontrant, à l'aide des propriétés intuitives de la sphère, l'existence du plan, dont ils tirent celle de la ligne droite, comme conséquence. Mais leur démonstration présente encore quelques points obscurs, qui n'ont pas été complètement éclaircis. (*Voir* la Note III.)

seules pour la construction d'une Géométrie complète, comprenant comme cas particulier celle que l'expérience nous indique comme la plus conforme aux propriétés réelles de l'étendue.

Cette Géométrie *générale* peut être développée jusqu'au bout, sans que rien n'oblige à déterminer d'une manière quelconque un certain paramètre arbitraire, qui entre dans la plupart des relations métriques. Elle est absolument vraie indépendamment de cette détermination, et si l'expérience venait à nous offrir un espace où les relations métriques fondamentales fussent vérifiées pour une valeur de ce paramètre autre que zéro, toutes les déductions obtenues seraient vérifiées pour cet espace. C'est ainsi que M. Beltrami a constaté que la Géométrie plane de Lobatchefsky et de Bolyai trouve sa réalisation complète dans les surfaces à courbure constante négative.

Mais, pour obtenir avec l'expérience un accord aussi complet que possible, on est amené à choisir, parmi toutes les valeurs que peut prendre le paramètre en question (1), la valeur zéro, qui se trouve en même temps correspondre au cas le plus simple et le plus facile à traiter. On obtient de cette manière la Géométrie *euclidienne* ou Géométrie ordinaire. Ce choix du paramètre répond, sous sa forme élémentaire, à l'hypothèse d'une direction unique pour le parallélisme.

Jusqu'à quel point ce choix était-il imposé par l'expérience? C'est ce qu'on n'avait jamais su avec précision avant les dernières recherches de Legendre et de Lobatchefsky (2). On savait déjà que les observations les plus précises n'avaient indiqué jusque-là aucun désaccord avec la Géométrie euclidienne. Mais ce sont ces deux géomètres qui ont démontré les premiers que, si l'accord a lieu pour des figures de grandes dimensions, il a lieu à plus forte raison pour des figures de dimensions moindres, et leurs conclusions ont donné à la vérification expérimentale de l'hypothèse euclidienne une valeur et une portée incomparablement supérieures à ce que l'on peut obtenir d'analogue pour les autres sciences physiques.

Ce n'est pas ainsi, on le sait, que l'expérience a parlé aux premiers inventeurs de la Géométrie, qui, comme le font encore beaucoup de modernes, ont confondu les données expérimentales avec celles de la raison pure. L'hypothèse euclidienne a été admise au nom de ce qu'on appelle l'*évidence,* c'est-à-dire d'un troisième moyen de connaître intermédiaire entre l'expérience et le raisonnement, et participant à la fécondité de l'une et à la certitude de l'autre. Pour nous l'*évidence* n'est autre chose qu'une expérience assez souvent répétée pour que la force de l'habitude nous en ait fait

---

(1) Ce paramètre pourrait recevoir non seulement des valeurs négatives qui répondraient à la Géométrie de Lobatchefsky ou Géométrie *hyperbolique* (*voir* Klein, *Math. Annalen*, t. VI, p. 112), comme on l'a nommée dans ces derniers temps, mais encore des valeurs positives, comme dans la Géométrie *elliptique,* où les lignes de plus courte distance peuvent se rencontrer en plus d'un point.

(2) *Voir* Note VI.

perdre la conscience, et dont les résultats, conservés par la mémoire, nous dispensent de la reproduire matériellement chaque fois que nous voulons y recourir. Il nous est impossible d'admettre cette entité, si commode à invoquer quand les raisons solides font défaut.

On a remarqué, en jugeant soit d'après une construction géométrique, soit d'après les indications d'un œil exercé, que, si l'on fait tourner tant soit peu une parallèle à une droite autour d'un de ses points, on obtient une rencontre des deux droites. Cela a suffi pour faire introduire ce fait parmi les principes, et on l'y a maintenu, parce que toutes ses conséquences se sont trouvées conformes aux expériences les plus variées de la vie de chaque jour, aussi bien qu'aux mesures scientifiques les plus précises.

Il nous paraît donc bien établi que la Géométrie, comme la Mécanique, l'Optique, la Théorie de la Chaleur ou celle de l'Électricité, se compose : 1° d'une partie *physique*, plus restreinte, à la vérité, que dans les autres sciences, mais à laquelle sont dues les hypothèses fondamentales relatives aux propriétés de l'espace, et qui comprend aussi les applications de cette science à l'étude de la nature : l'Astronomie pratique, la Géodésie, la Topographie, etc.; 2° d'une partie *théorique* et *abstraite,* qui met en œuvre les hypothèses, quelles qu'elles soient, fournies par la partie physique, et qui seule a droit au titre de *science exacte*. C'est à cette dernière partie seule qu'appartient la *certitude mathématique*, laquelle ne porte que sur l'accord des hypothèses avec leurs conséquences, et nullement sur la valeur des hypothèses elles-mêmes. Le contrôle des hypothèses appartient exclusivement à la partie physique, qui, après les avoir suggérées à la science abstraite, a encore à apprécier leur exactitude, soit directement, soit d'après leurs conséquences.

NOTE II.

Sur le mouvement géométrique.

C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de Géométrie la considération du *mouvement*.

L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du *mouvement géométrique,* n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.

Ce mouvement géométrique, qu'il faut se garder de confondre avec le mouvement *dans le temps,* objet de la *Cinématique,* ne peut pas dépendre d'une autre science que de la *Géométrie pure*.

Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux

préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions nouvelles de temps et de vitesse.

C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu et malgré eux; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de Géométrie dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique plus ou moins déguisée.

NOTE III.

Sur les axiomes relatifs à l'existence du plan et de la ligne droite.

Nous avons admis, pour plus de simplicité, comme deux axiomes indépendants, l'existence de la ligne droite et celle du plan. Les deux géomètres dans les Ouvrages desquels nous trouvons la vraie théorie des parallèles, Bolyai et Lobatchefsky, ont poussé plus loin leurs recherches, et ont fondé les définitions du plan et de la ligne droite sur d'autres axiomes plus simples et d'une évidence plus frappante. Voici à peu près comment Bolyai établit ces notions (1).

On peut d'abord définir l'*égalité* de deux distances indépendamment de la ligne qui sert à les mesurer, et sans laquelle on ne pourrait définir ce que c'est qu'une distance plus grande qu'une autre. Si A et B, A′ et B′ sont deux systèmes de points, on peut imaginer que chacun de ces systèmes fasse partie d'un système solide quelconque (2). Si l'on peut transporter l'une de ces figures sur l'autre de manière que, A étant placé sur A′, B puisse se placer sur B′, on dira que les *distances* AB, A′B′ sont *égales*.

Le point A étant considéré comme fixe, l'ensemble de tous les points B de l'espace également distants de A forme une surface continue et fermée, appelée *sphère*, et dont le point A est le *centre*.

Une sphère partage l'espace en deux parties, l'une *intérieure*, l'autre *extérieure*. Un point ne peut passer de l'une de ces parties dans l'autre sans avoir rencontré la sphère.

Une sphère ne fait que glisser sur elle-même, lorsqu'on la fait tourner d'une manière quelconque autour de son centre.

Deux sphères de centres différents ne peuvent coïncider.

D'un centre donné, on peut toujours décrire une sphère passant par un point donné.

On peut aussi, d'un centre donné, décrire une sphère qui renferme dans son intérieur une figure donnée quelconque de dimensions finies.

---

(1) *Tentamen in elementa Matheseos*, etc., t. I, p. 468 et suiv.; Maros Vásárhely, 1833. — *Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.* § 33 et suiv; Maros Vásárhely, 1851.

(2) *Voir* la Note I.

Soient S, S′ deux sphères de centres O, O′, et telles que chacune d'elles passe par le centre de l'autre. Puisque chacune de ces sphères a une partie intérieure à l'autre sphère, il faudra nécessairement qu'elles aient des points communs. Si A est un de ces points, et qu'on fasse tourner l'ensemble des deux sphères autour des deux centres supposés fixes, A décrira le lieu des points communs aux deux sphères. Ce lieu sera une courbe fermée C, pouvant glisser sur elle-même, et à laquelle nous donnerons le nom de *cercle*.

Si l'on retourne la figure, de manière que O vienne en O′ et O′ en O, S coïncidera avec S′ et S′ avec S. Par suite le cercle C retombera sur son ancienne position. Donc le cercle est superposable à lui-même par retournement.

Des centres O et O′ décrivons deux autres sphères S_1, S'_1, égales entre elles, et enveloppant respectivement les sphères S et S′. Chacun des centres O, O′ sera à la fois intérieur aux deux sphères, d'où l'on conclut aisément que les deux sphères, ayant une partie intérieure commune, doivent nécessairement se rencontrer. On verrait de même que leur intersection est un nouveau cercle C_1, pouvant glisser sur lui-même, et superposable à lui-même par retournement.

Si l'on construit ainsi deux séries de sphères égales, s'étendant d'une manière continue jusqu'à l'infini, le lieu des cercles suivant lesquels elles se coupent deux à deux s'étendra indéfiniment, et formera une surface pouvant glisser sur elle-même, lorsqu'on la fait tourner autour des points O, O′, et superposable à elle-même par retournement. Nous appellerons cette surface un *plan*.

Lorsqu'on retourne la figure en plaçant O en O′ et O′ en O, on peut faire en sorte qu'un point A du cercle C revienne sur son ancienne position. De part et d'autre de A, les points du cercle se placeront deux à deux les uns sur les autres, et se distribueront ainsi symétriquement par rapport à A. Si l'on désigne par M, M′ deux quelconques de ces points symétriques, ils pourront être considérés comme les positions simultanées de deux mobiles partant de A et parcourant le cercle en sens contraire. Ces mobiles se rencontreront nécessairement en un point B, qui, avec A, partagera le cercle en deux moitiés superposables AMB, AM′B.

Le retournement de la figure pourra être considéré comme produit par une demi-révolution autour des points A et B, que le retournement laisse immobiles.

Dans la demi-révolution de la figure autour de A et de B, chaque point m du plan, appartenant au cercle c, décrit un demi-cercle, en venant se placer sur un point m' du même cercle c, et tant que ce cercle ne se réduira pas à un point unique, il ne pourra revenir à sa première position qu'après avoir achevé la révolution entière.

Or, dans chaque cercle c, il y a deux points qui se trouvent dans leur position primitive après la demi-révolution. Donc ces points ont dû décrire des cercles nuls, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas changé de place pendant la révolution.

L'ensemble de tous ces points forme une ligne qui reste immobile lors-

qu'on la fait tourner autour de deux de ces points. Cette ligne s'appelle la *ligne droite.*

Transportons maintenant la droite le long d'elle-même, de manière que deux de ses points a, b tombent sur deux autres points a', b' de la première position. La nouvelle position restera immobile, lorsqu'on la fera tourner autour de a' et de b', et l'on en conclut qu'elle coïncidera nécessairement dans toute son étendue avec l'ancienne position, les points de celle-ci étant les seuls qui décrivent des cercles nuls. Donc on peut faire glisser une droite le long d'elle-même sans qu'elle cesse de coïncider avec sa première position.

Si d'un point α comme centre on décrit un sphère qui enveloppe les points A et B, et rencontre la droite en b et b', la portion de droite ab pourra être placée de manière que a tombe en b' et b en a. Alors se trouvera comblée la lacune qui existait encore entre A et B.

En faisant maintenant tourner la figure autour de OO', la portion de droite AB engendrera une portion de plan qui comblera la lacune laissée dans l'intérieur du cercle C.

Si l'on fait tourner la droite ab autour de a de manière que b reste dans le plan, la droite restera tout entière dans le plan. Car, si elle en sortait d'un côté, elle ne serait plus superposable à elle-même, lorsqu'on ferait faire au plan une demi-révolution autour des points du cercle qui sont les milieux des deux arcs ab.

On peut donc joindre par une droite le point a à un point quelconque m du plan.

Si l'on fait mouvoir la droite am le long d'une autre droite quelconque bm, tracée sur le plan, la droite mobile décrira le plan.

Si l'on fait tourner le plan autour du point a de manière que bm rencontre toujours deux positions de am, le plan ne cessera pas de coïncider avec lui-même.

Il en sera de même si l'on fait glisser de la même manière la droite am e long d'elle-même.

Donc le plan est une surface superposable à elle-même lorsqu'on la fait glisser sur elle-même d'une manière quelconque, et de plus superposable à elle-même par retournement.

De là résulte que par trois points non en ligne droite on peut toujours faire passer un plan et un seul.

NOTE IV.

Sur la définition de la ligne droite.

Supposons un observateur placé au milieu d'une vaste plaine. Il aperçoit de loin un point, et veut se transporter en ce point.

L'*instinct* le porte à marcher dans la *direction* suivant laquelle ce point

lui envoie ses impressions lumineuses. La preuve que ce procédé est *instinctif*, c'est qu'il est suivi par tous les animaux.

L'*expérience,* aidée de la réflexion, lui apprend plus tard qu'en suivant cette route il accomplit le trajet en moins de temps que s'il se fût écarté de la direction des rayons lumineux.

De là cette vérité vulgaire, mais assez complexe au point de vue géométrique : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.* C'est cet énoncé que les auteurs de la plupart des Traités de Géométrie ont cru pouvoir prendre pour définition de la ligne droite.

En discutant l'origine et la véritable signification de cette notion du sens commun, nous verrons sans peine que l'inscription d'une telle proposition en tête des éléments de Géométrie indique que l'on n'a pas suffisamment analysé les idées très simples qui se rapportent à cet objet.

Certains philosophes de l'antiquité, au lieu de Proclus, voulant railler agréablement la 20e proposition d'Euclide, prétendaient que les ânes eux-mêmes l'admettaient sans démonstration. On peut répondre à cela que les ânes, en suivant telle route plutôt que telle autre pour atteindre leur but, ne se préoccupent en aucune façon de la longueur du chemin. Leur instinct les porte à marcher dans la ligne suivant laquelle l'objet impressionne leurs sens, et cette ligne sera la ligne droite, parce que c'est la route que suivent la lumière, le son, etc. Il n'est pas impossible, d'ailleurs, que les animaux fassent quelquefois acte d'intelligence, en adoptant le chemin que l'expérience leur a montré être le plus court.

C'est donc l'expérience, aidée de la mémoire et de la réflexion, qui nous apprend que le chemin rectiligne est, toutes choses égales d'ailleurs, le plus tôt parcouru.

Le jugement concordant, que l'on forme en appréciant *au coup d'œil* la longueur du chemin, doit être rapporté à la même origine, puisque l'idée de grandeur, que nous transmet immédiatement le sens de la vue (abstraction faite des notions fournies par les autres sens, ainsi que par la mémoire et la réflexion), n'a pas d'autre source que le mouvement plus ou moins considérable que doit exécuter l'axe de l'œil pour parcourir tel ou tel contour.

Il nous paraît donc établi que l'adoption du chemin rectiligne a une origine primitivement instinctive et irréfléchie, et que sa propriété de *minimum,* qui en a fait conserver l'usage, nous a été révélée par l'expérience.

Examinons maintenant de plus près quelle est la signification de ce jugement, quelle en est l'exacte interprétation géométrique, après qu'on l'a, pour ainsi dire, épuré par la faculté d'abstraction, et dépouillé de toutes les circonstances physiques qui avaient accompagné sa formation.

Le chemin de *direction constante* [1], que nous parcourons en suivant le rayon lumineux, nous conduit à l'idée d'une ligne de direction constante, en remplaçant, par la pensée, notre corps par un point, c'est-à-dire en rédui-

---

[1] Nous jugeons que la direction est constante, parce que nous n'avons fait aucun effort pour imprimer à notre corps un mouvement de rotation.

sant indéfiniment les dimensions de notre corps par rapport à ce qui l'environne; ce qui donne à l'idée de chemin une précision de plus en plus grande.

En appliquant le même procédé d'abstraction aux autres chemins possibles, on a dû continuer d'abord, sans s'en rendre compte, à mesurer la longueur du chemin par le nombre des pas, le temps du parcours par le temps employé à faire un pas; l'idée de temps n'étant ici, du reste, qu'une idée auxiliaire, qui doit être éliminée à la fin de l'opération intellectuelle. Dans le langage abstrait, cela revient à supposer le mobile décrivant un polygone, et à admettre, comme un fait d'expérience, qu'un côté d'un polygone est moindre que la somme de tous les autres.

Pour aller plus loin, pour acquérir des notions relatives à la longueur des lignes courbes, on est forcé de recourir à un nouveau procédé, au procédé du passage à la limite, qui remplace la comparaison directe devenue impossible.

Il ne suffit pas, en effet, de faire appel ici à l'idée vague que chacun a ou croit avoir de la longueur d'une courbe. On peut bien, il est vrai, définir nettement ce qu'on entend par un arc plus grand ou plus petit qu'un autre, lorsque ces deux arcs sont comptés *sur une même courbe, dans le même sens et à partir d'une origine commune.* Mais déjà, dès qu'il ne s'agit plus du cercle ou de l'hélice, il n'est plus possible de comparer directement deux arcs de la même courbe, lorsqu'ils ne sont pas comptés à partir de la même origine. A plus forte raison, cette comparaison est-elle impossible, lorsque l'on considère des arcs pris sur des courbes différentes.

Il faut bien, cependant, que l'on trouve un moyen de suppléer à cette comparaison directe, sans quoi, en disant que telle ligne est plus ou moins longue que telle autre, on ne ferait que prononcer une phrase *absolument vide de sens.* Voyons donc quels moyens peuvent proposer ceux qui se refusent à invoquer le principe des limites.

1° Le temps employé par le mobile pour parcourir un certain chemin. — Mais il faut alors supposer tacitement que la *vitesse* est la même dans les deux chemins que l'on veut comparer. Qu'est-ce maintenant que la vitesse? Ou, si l'on renonce à définir la vitesse, en l'admettant au nombre des quantités *primitives*, qu'est-ce que deux vitesses égales? — De quelque manière que l'on essaye de répondre à cette question, on se trouvera toujours obligé, tôt ou tard, de passer par les notions de limites, et l'on n'aura fait que reculer inutilement la difficulté, en introduisant des auxiliaires inutiles, pour faire une comparaison qu'on aurait aussi bien pu faire directement.

2° On applique un fil flexible sur la courbe, puis on le redresse. — On suppose ici le fil *inextensible.* Qu'est-ce donc qu'un fil inextensible, dès qu'il cesse d'être en ligne droite ou d'être appliqué sur la même courbe? Toutes les définitions que l'on peut tenter de donner du phénomène physique de l'allongement d'un fil curviligne reviennent, en définitive, à ôter à ce fil (supposé infiniment mince) son caractère de courbe continue, pour en faire un polygone à côtés *très petits*, et ce n'est que dans le passage à la limite que l'on arrive à supposer ces côtés *infiniment petits.* On voit

donc que, là encore, on n'a fait qu'obscurcir la question en la compliquant de notions physiques étrangères.

Telles sont les difficultés insurmontables que l'on rencontre, lorsqu'on veut définir la plus simple des figures de Géométrie au moyen d'une de ses propriétés *secondaires*, qui n'est, au fond, qu'un théorème d'une nature assez compliquée, et exigeant, pour être compris, la connaissance préalable d'un grand nombre d'autres propositions [1].

Nous disons que la propriété de minimum de la ligne droite est une propriété secondaire. En effet, aucune des propositions fondamentales de la Géométrie ne repose sur cette propriété, du moins quand on prend, pour arriver à leur démonstration, la voie la plus directe et la plus naturelle.

La propriété dont il s'agit a son analogue dans toutes les figures symétriques, sans que cependant on ait jamais songé à la prendre comme définition pour une autre figure que pour la ligne droite. Que dirait-on, en effet, d'un auteur qui définirait le cercle comme la courbe d'aire *maximum* parmi celles d'un périmètre donné? Il serait difficile de déduire simplement, de cette définition, les propriétés fondamentales du cercle. Et cependant c'est ce même procédé que la plupart des auteurs suivent pour la ligne droite, et la force de l'habitude nous empêche seule d'en sentir l'étrangeté.

L'origine de cette prétendue définition de la ligne droite remonte à une fausse interprétation d'un passage d'Archimède. Lorsque ce grand géomètre voulut, le premier, aborder les problèmes de la rectification du cercle et de la quadrature de la sphère, il lui fallut bien définir ce qu'il entendait par *longueur* d'une ligne courbe ou par *aire* d'une surface courbe. Pour y parvenir, il posa comme des *principes* (ὑποθέσεις) certaines propositions, sur lesquelles il s'appuya comme sur de nouveaux axiomes :

1° La ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.

2° Un contour convexe est moindre qu'un contour qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités.

3° La surface plane est la plus petite de toutes celles qui sont terminées au même contour.

Etc.

On peut aisément montrer, comme chacun sait, que la méthode d'exhaustion, employée par les Anciens dans leurs démonstrations, est identique, pour le fond, avec la méthode des limites, par laquelle les Modernes l'ont remplacée. La limite d'une quantité variable n'est déterminée, en effet, que par l'exclusion de toutes les valeurs de la variable, autres que celle que l'on ne peut définir directement, et que la variable ne peut en général jamais atteindre; et ce procédé est précisément celui de la méthode d'exhaustion.

En suivant le même ordre d'idées, on reconnaîtra facilement que les prin-

---

[1] Ce théorème dépend, en effet, comme nous l'avons déjà remarqué, de la recherche des conditions de minimum de l'intégrale $\int_a^b \sqrt{dx^2 - dy^2 - dz^2}$.

cipes que nous venons de rapporter, étant interprétés d'après les idées modernes, ne sont autre chose que des *définitions* de la longueur d'une ligne courbe, ou de l'aire d'une surface courbe. Ainsi Archimède, ne pouvant définir directement la ligne droite qui représente une longueur curviligne, a défini celle-ci comme quelque chose plus grand que tous les contours rectilignes inscrits, et plus petit que tous les contours rectilignes circonscrits: Comme on peut faire en sorte que deux contours rectilignes, pris dans chacune de ces deux séries, soient rendus aussi peu différents que l'on voudra l'un de l'autre, il en résulte que ces deux séries tendent vers une limite commune, qui est la longueur de la courbe. On voit donc que nous sommes arrivés à la définition moderne de la longueur de l'arc de courbe, sans faire autre chose que de traduire et de développer l'idée d'Archimède, et que les principes que nous avons cités, loin de contenir une définition de la ligne droite, servent au contraire à définir, au moyen de la ligne droite, la longueur de la ligne courbe.

On peut remarquer en même temps que les auteurs qui ont fait cette confusion au sujet de la ligne droite auraient dû, pour rester conséquents avec eux-mêmes, prendre le troisième principe pour définition du plan, les propriétés exprimées par les principes 1 et 3 étant complètement analogues.

NOTE V.

Sur l'unité angulaire.

Les diverses fonctions trigonométriques, le sinus, la tangente, etc., sont définies d'abord pour le premier quadrant, dans l'intervalle duquel elles parcourent entièrement la série de leurs valeurs numériques. C'est par l'introduction des signes + et — que l'on parvient à donner, aux angles non compris entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, des fonctions trigonométriques, qui ne sont autres que celles de certains angles du premier quadrant, prises avec des signes convenables. On sait, en effet, que, pour obtenir les fonctions trigonométriques d'un angle < 0 ou $> \frac{\pi}{2}$, on commence par ajouter ou retrancher le nombre de quadrants nécessaire pour ramener l'angle donné à être compris dans le premier quadrant, de sorte qu'il suffit d'avoir une Table des fonctions trigonométriques dressée seulement pour le premier quadrant.

Si l'on exprime maintenant un angle en prenant le quadrant pour unité, et le soumettant à la division décimale, l'angle se composera d'une partie entière, positive ou négative, et d'une partie décimale, que l'on pourra toujours supposer positive. L'opération de l'addition ou de la soustraction des quadrants sera alors complètement analogue à celle du changement de

caractéristique dans les logarithmes décimaux. C'est déjà là un premier avantage du choix de la véritable unité angulaire.

Si, comme quelques auteurs l'ont proposé, on prenait le cercle entier pour unité, le quadrant serait représenté par la fraction 0,25, et, pour opérer la réduction d'un angle au premier quadrant, on serait obligé d'altérer les deux premières décimales, ce qui serait beaucoup moins simple dans la pratique.

L'adoption, comme unité angulaire, du centième de quadrant ou *grade* n'a d'autre raison d'être que le désir de se rapprocher du degré sexagésimal. Il n'en peut résulter aucun avantage sérieux, mais seulement une complication dans l'écriture, et une perpétuelle confusion des degrés *nouveaux*, des minutes *nouvelles*, etc., avec les degrés *anciens*, les minutes *anciennes*, etc.

Nous avons signalé une première analogie entre la division décimale du quadrant et les logarithmes décimaux du système de Briggs. La raison de cette analogie est facile à saisir. Si l'on considère une exponentielle à exposant complexe,

$$a^{x+iy},$$

i désignant la racine carrée de -1, la partie réelle de l'exposant est un logarithme réel, le coefficient de i un arc de cercle; de sorte qu'on peut regarder les arcs de cercle comme des logarithmes imaginaires. D'après cela, si l'on rapporte les logarithmes au système décimal, les déplacements de la virgule dans la valeur numérique de l'exponentielle répondront à des changements de la seule caractéristique; et, d'après la nature des exponentielles réelles, qui ne sont pas des fonctions à période réelle, la caractéristique pourra prendre toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$.

De même, si l'on adopte la division décimale pour les logarithmes imaginaires, les changements de quadrant, qui reviennent à la multiplication de l'exponentielle par une puissance de i, correspondront à des changements de la *caractéristique* du logarithme imaginaire; et, d'après le caractère périodique de l'exponentielle imaginaire, cette exponentielle parcourra le cycle entier de ses valeurs, lorsqu'on fera varier la caractéristique de 0 à 4, ou encore, ce qui revient au même, de -2 à $+2$, l'addition d'une unité à la caractéristique équivalant à la multiplication par i.

Ainsi, de même que 10 est la base des logarithmes réels décimaux, $e^{\frac{2i}{\pi}}$ sera celle des logarithmes imaginaires décimaux.

Les autres unités angulaires dont on fait usage ont aussi leurs analogues dans les logarithmes, et il est aisé de s'en rendre compte au moyen des considérations précédentes.

Dans le calcul littéral, on emploie constamment les logarithmes *naturels*, relatifs à la base e, et l'on prend pour unité angulaire l'arc égal au rayon. Dans ce cas, l'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux réels n'est plus un nombre entier; c'est le logarithme naturel de 10, ou le nombre 2,302585.... L'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux imaginaires est, de même, le nombre irrationnel $\frac{\pi}{2}$. Pour calculer numérique-

ment dans ce système *naturel*, on serait donc obligé de se servir de caractéristiques *fractionnaires*, ce qui serait peu commode dans la pratique.

Il reste à chercher l'analogue de la division sexagésimale du cercle. Il faut, pour cela, remonter dans l'antiquité au temps où les astronomes faisaient usage de la division sexagésimale du rayon, et où le calcul proprement dit était trop méprisé des hommes de science pour qu'ils songeassent à en perfectionner les méthodes. Les inventeurs des logarithmes se sont bien gardés de reprendre ces traditions, en choisissant 60 ou 90 pour bases de leurs systèmes, et la numération sexagésimale des logarithmes imaginaires n'a plus aujourd'hui rien qui lui corresponde dans la numération des nombres réels, du moins dans les pays qui, comme la France, ont soumis leur système métrique à la division décimale.

On se demande souvent pourquoi les astronomes français, après avoir proposé les premiers la division décimale du quadrant (1), que les étrangers appellent encore la *division française*, ont été eux-mêmes les premiers à l'abandonner. Il y a, pour expliquer ce fait, une raison très grave dans la nécessité où sont les astronomes de puiser sans cesse dans des registres d'observations, qui, à toutes les époques, ont été construits d'après le système sexagésimal. On conçoit quel immense travail entraînerait la conversion de tant de nombres d'un système dans l'autre, et quelle source d'erreurs et de confusion résulterait d'un tel remaniement, sans parler des inconvénients qu'éprouveraient les observateurs actuels, forcés de changer leurs habitudes et leurs instruments. L'Astronomie, enchaînée par son passé, a donc sagement fait de renoncer à un perfectionnement qui, en somme, aurait présenté plus de dangers que d'avantages réels.

Mais les astronomes observateurs ne sont pas seuls à se servir des Tables trigonométriques. Or, *pour tout autre usage que le calcul immédiat des observations faites avec des instruments portant la division sexagésimale*, il est *incontestable* que la division décimale présenterait des avantages immenses, et nous ne pouvons comprendre la persistance avec laquelle la plupart des calculateurs la rejettent. Il n'est pas besoin d'une bien grande expérience du calcul pour voir combien on gagnerait à l'adopter dans les calculs de Mécanique céleste, de Géodésie, de Topographie, en un mot, dans tous les cas où l'on n'a pas à lire ses nombres dans un registre d'observations astronomiques.

La seule raison valable que l'on pourrait nous opposer, c'est le manque de bonnes Tables trigonométriques décimales. Les seules Tables à sept figures construites dans ce système, celles de Hobert et Ideler, de Borda et de Callet, sont mal disposées pour les usages pratiques, l'intervalle des divisions étant trop considérable. Les tables de Plauzoles, à six figures, sont beaucoup plus commodes, et cependant elles sont peu répandues. Pour que les calculateurs pussent jouir des avantages de la division décimale, il faudrait

---

(1) *Voir*, pour plus de détails, l'Introduction des *Tables décimales* de Hobert et Ideler. Berlin, 1799.

que l'on tirât des grandes Tables manuscrites du Cadastre (1) une série de Tables répondant aux divers degrés de précision dont on a besoin dans les calculs, c'est-à-dire des Tables à sept, à six, à cinq et à quatre figures. Si cette publication était faite avec les mêmes soins et une disposition aussi convenable que celle des bonnes Tables sexagésimales publiées récemment en Allemagne, nous sommes convaincu que le seul système vraiment rationnel reprendrait bientôt faveur, et que les Tables sexagésimales ne trouveraient plus place que dans les observatoires, où elles devront longtemps encore être exclusivement en usage.

NOTE VI.

Sur l'axiome 11 (dit postulatum) d'Euclide.

Des recherches déjà anciennes, mais qui ont passé inaperçues jusqu'à ces derniers temps, ont mis hors de doute que la démonstration de l'axiome 11 d'Euclide (notre axiome IV) ne peut pas se déduire des axiomes précédents. Ces recherches ont été faites vers l'année 1829, par deux géomètres, Lobatchefsky et J. Bolyai, qui, par des méthodes différentes et indépendamment l'un de l'autre, sont parvenus presque en même temps à retrouver les résultats que Gauss possédait déjà depuis près de quarante ans. Malheureusement ce grand mathématicien n'a jamais publié ses travaux sur ce sujet, et sans la publication récente de sa correspondance avec Schumacher, nous ignorerions encore l'existence des nouvelles théories qu'il a appuyées de son imposante autorité.

Je n'entrerai pas ici dans l'exposition complète de ces théories, que l'on trouvera développées avec détails dans la brochure de Lobatchefsky dont j'ai donné une traduction (2). Je me contenterai d'en faire connaître les points principaux, et d'indiquer sommairement ce que la *Géométrie abstraite*, fondée sur la négation de l'axiome 11, a de commun avec la *Géométrie euclidienne* ou *expérimentale*, et en quoi elle s'en écarte.

La théorie des parallèles ne fait qu'un avec la proposition 32 d'Euclide sur la somme des angles d'un triangle rectiligne. Aussi plusieurs géomètres, au lieu d'essayer la démonstration directe de l'axiome 11, ont fait porter leurs efforts sur la détermination de la somme des angles d'un triangle.

---

(1) Il existe deux exemplaires de ces Tables, déposés l'un à la Bibliothèque de l'Observatoire de Paris, l'autre à celle de l'Institut. Voy. *Nouvelles Annales de Mathématiques, Bulletin de Bibliographie*, 1855, p. 14; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 24 mai 1858, et *Annales de l'Observatoire*, t. IV.

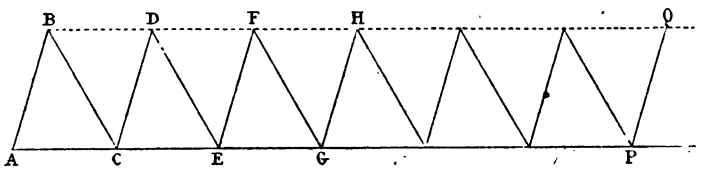
(2) *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, par N. I. Lobatchefsky, suivi d'un extrait de la *Correspondance de Gauss et de Schumacher*. Paris, Gauthier-Villars, 1863.

On peut d'abord établir, comme Legendre l'a fait (1), quelques propositions complémentaires des 28 premières propositions d'Euclide, et indépendantes comme elles de l'axiome 11.

I. *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut pas surpasser deux angles droits.*

Désignons, pour abréger, par $\int ABC$ (*fig.* 43) la somme des trois angles du triangle ABC, et soit, s'il est possible, $\int ABC > 2$ dr. Sur AC prolongé portons les longueurs $CE = EG = \ldots = AC$, et sur ces bases construisons les triangles DCE, FEG, ..., tous égaux à ABC.

Fig. 43.



L'angle BCD, supplément de la somme des angles ACB et DCE = BAC, sera, d'après l'hypothèse admise, < ABC. Donc [*Eucl.*, I, 24] BD < AC.

On voit d'ailleurs [*Eucl.*, I, 4] que tous les triangles BCD, DEF,... sont égaux entre eux. Donc $BD = DF = FH = \ldots$.

Soit maintenant δ la différence $AC - BD$. Si l'on construit n triangles consécutifs égaux à ABC, la différence entre la droite totale $AP = n.AC$ et la somme des droites $BD + DE + \ldots = n.BD$ sera $n\delta$; et, en prenant n assez grand, on pourra faire en sorte que $n\delta$ surpasse la longueur finie $AB + PQ = 2AB$.

Mais on aurait alors $AP - (BDF\ldots Q) > AB + PQ$, d'où il résulterait que le côté AP du polygone ABD...QPA serait plus grand que la somme de tous les autres, ce qui est contraire aux corollaires de la proposition 20 du premier livre d'Euclide [§ 24, p. 57]. p. 59 ?

Il est donc impossible qu'il existe un triangle rectiligne dont les angles aient une somme plus grande que deux angles droits.

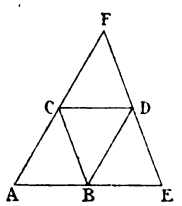
II. *S'il existe un seul triangle rectiligne dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits, cette somme sera égale aussi à deux angles droits pour tous les triangles rectilignes possibles.*

1° Soit ABC (*fig.* 44) un triangle rectiligne tel que $\int ABC = 2$ dr. Faisons le triangle $BCD = ABC$, en prenant l'angle $BCD = CBA$ et $CD = AB$, d'où $BCD = A$, $CBD = BCA$, $BD = AC$.

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 369. — *Éléments de Géométrie*, 3e à 8e édition. — *Voir* encore Lobatchefsky, *Études sur les parallèles*, nos 19 et 20.

Prolongeons AB, AC de longueurs BE = AB, CF = AC; menons DE, DF. Des égalités précédentes et de $\angle$ABC = 2 dr., il résulte DBE = BAC = DCF, d'où l'on conclut que chacun des triangles DBE, DCB est égal à ABC. On en déduit ensuite aisément que la somme des angles en D est = 2 dr., et

Fig. 44.

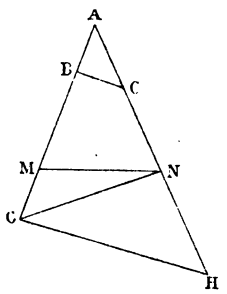


par suite EDF est une ligne droite. Donc on peut construire un triangle AEF, ayant ses côtés doubles respectivement de ceux du triangle proposé ABC; de plus, équiangle avec ABC, et ayant par suite la somme de ses angles = 2 dr.

On pourra répéter cette construction autant de fois que l'on voudra, et obtenir ainsi un triangle dont les côtés seront aussi grands que l'on voudra, et la somme des angles égale encore à 2 dr.

2° Si un triangle AMN (*fig.* 45) a un angle A commun avec le triangle ABC dont la somme des angles = 2 dr., on aura aussi $\angle$AMN = 2 dr. Construisons, en effet, d'après ce qu'on vient de voir, un triangle AGH, dont

Fig. 45.

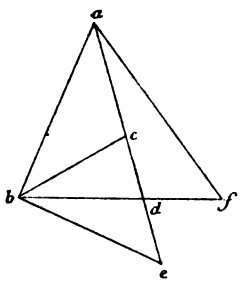


les côtés AG, AH soient respectivement plus grands que AM, AN, et tel que l'on ait $\angle$AGH = $\angle$ABC = 2 dr.; menons GN. La somme totale $\angle$AMN + $\angle$MNG + $\angle$NGH = la somme des angles en M + la somme des angles en N + $\angle$AGH, et, par suite, = 6 dr.; et comme aucune des trois sommes partielles ne peut surpasser 2 dr. [prop. 1], il faut que chacune d'elles soit = 2 dr. Donc $\angle$AMN = 2 dr.

3° Soit maintenant *abc* (*fig.* 46) un triangle quelconque. Si ses angles ne sont pas égaux à ceux du triangle ABC pour lequel $\angle$ABC = 2 dr., il faudra que l'un au moins d'entre eux soit moindre que l'angle correspondant de

ABC, sans quoi l'on aurait $\int abc < 2$ dr. Supposons donc $bac >$ BAC; faisons $baf =$ BAC et menons bf à volonté. D'après 2°, abf et ABC ayant un angle commun, $\int abf = 2$ dr.; abd et abf ayant un angle commun, $\int abd = 2$ dr.; abd et abc ayant un angle commun, $\int abc = 2$ dr.

Fig. 46.



Outre ces théorèmes et les 28 premières propositions d'Euclide, voici un aperçu des propositions de la Géométrie qui s'établissent indépendamment de l'axiome 11 (1).

Une droite peut avoir avec un cercle un ou deux points communs, et pas davantage. Trois points étant donnés sur un cercle, trouver le centre de ce cercle. Possibilité des polygones réguliers; construction effective de ceux de 4, 8, 16, ... côtés seulement. Deux cercles peuvent avoir, sans coïncider, un ou deux points communs, et pas davantage.

Propriétés des figures sphériques, en partie analogues aux 28 premières propositions d'Euclide. Égalité des triangles sphériques. Triangles sphériques isoscèles, etc. Trouver le centre d'un cercle passant par trois points donnés sur la sphère (2). Déterminer le rayon d'une sphère par une construction plane. Tracer un grand cercle par deux points donnés, ou perpendiculaire sur le milieu d'un arc de cercle donné, ou partageant un angle donné en deux parties égales, etc. Petits cercles et arcs de grands cercles tangents. Construction des polygones sphériques réguliers de 4, 8, 16,... côtés. Aire du triangle sphérique et de la sphère totale. La somme des angles d'un triangle sphérique dont les côtés sont infiniment petits par rapport au rayon de la sphère a pour limite deux angles droits.

Si donc on construit la surface qui est la limite d'une sphère passant par un point donné, et dont le rayon croît jusqu'à l'infini, les triangles tracés sur cette surface auront la somme de leurs angles égale à deux angles droits, et par conséquent toutes les conséquences qui découlent de l'axiome 11 en Géométrie plane sont vraies, dans l'hypothèse contraire, pour ces triangles

---

(1) Bolyai, *Kurzer Grundriss eines Versuchs, u. s. w.*

(2) Ce problème n'est résoluble pour trois points quelconques donnés sur un plan que lorsqu'on admet l'axiome 11. Si trois points quelconques, non en ligne droite, pouvaient toujours être placés sur une sphère, l'axiome 11 serait démontré.

* the pseudo spherical surface not a plane -

tracés sur la *sphère-limite*. En particulier, on peut appliquer à ces triangles les formules de la Trigonométrie rectiligne ordinaire, et en déduire ensuite les formules de la Trigonométrie sphérique, qui se trouvent ainsi établies indépendamment de la théorie des parallèles (1).

Mais cette sphère-limite coïncide-t-elle avec un plan ? Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'elle n'en diffère pas sensiblement dans l'étendue accessible à nos mesures, les triangles rectilignes que nous connaissons ayant une somme d'angles que nous ne pouvons pas distinguer de 2 angles droits (2). Rien ne nous démontre cependant qu'il en soit de même pour des triangles rectilignes plus grands, et que la somme des angles de ces triangles ne finisse pas par être sensiblement moindre que 2 droits.

Il n'y a, en effet, aucune incompatibilité entre les premiers axiomes (nos axiomes, I, II et III) et la supposition que la somme des angles d'un triangle soit moindre que 2 angles droits. J. Bolyai et Lobatchefsky ont tiré les conséquences de cette supposition, sans jamais se trouver en contradiction avec la logique, mais seulement avec l'expérience, telle que nous la permettent nos moyens limités. ?*

Si la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits, on peut alors mener, par un point donné, une infinité de droites différentes, qui ne rencontrent pas une droite donnée. Celle de ces droites qui s'approche le plus de la droite donnée est dite *parallèle* à cette droite. Deux droites parallèles sont asymptotes l'une de l'autre.

Il n'y a plus, dans cette hypothèse, de figures planes semblables. On ne peut plus partager par les procédés élémentaires une droite en trois parties égales, ni circonscrire un cercle à un triangle rectiligne quelconque. La somme des angles d'un triangle varie entre 2 angles droits et zéro, et peut diminuer indéfiniment, lorsqu'on fait croître les côtés à l'infini. L'angle d'un polygone régulier n'est plus constant, et diminue indéfiniment lorsqu'on fait croître le côté du polygone jusqu'à l'infini.

Au contraire, la somme des angles d'un triangle rectiligne infiniment petit tend vers 2 angles droits, comme celle des angles d'un triangle sphérique infiniment petit.

Les formules de la Trigonométrie rectiligne relatives à l'hypothèse où l'on rejette l'axiome 11 présentent une grande analogie avec celles de la Trigonométrie sphérique; elles s'en déduiraient en attribuant aux côtés du triangle sphérique des valeurs imaginaires.

---

(1) Lagrange avait reconnu l'indépendance entre les formules de la Trigonométrie sphérique et l'axiome 11, et il croyait pouvoir tirer de là une démonstration de cet axiome. Il considérait d'ailleurs toutes les autres tentatives de démonstration comme insuffisantes. C'est ainsi qu'il s'exprimait dans ses conversations avec Biot. (*Communiqué par M. Lefort.*)

(2) D'après les calculs de Lobatchefsky, les observations astronomiques indiquent que, pour un triangle dont les côtés seraient à peu près égaux à la distance de la Terre au Soleil, la somme des angles ne diffère pas de 2 dr. de 3 dix-millièmes de seconde.

[illegible] may define plane } if
but [illegible]
[illegible] surface, and
course [illegible]
[illegible]
[illegible] of Hamel.

Lobatchefsky a fait voir (1) que l'on pourrait construire sur cette hypothèse un système complet de Géométrie, à laquelle il a donné le nom de *Géométrie imaginaire*. Les expressions des éléments différentiels des lignes courbes, des surfaces et des volumes sont les mêmes que dans la *Géométrie réelle* ou *expérimentale*, les intégrales seules étant différentes.

En résumé, l'expérience ne nous ayant montré aucun triangle rectiligne, si grand qu'il soit, dont la somme des angles soit moindre que deux angles droits, la Géométrie d'Euclide est certainement vraie, au moins dans les limites de nos observations. Aussi suffira-t-elle toujours dans la pratique, et l'étude de la *Géométrie abstraite* n'offrira jamais d'intérêt qu'au point de vue philosophique, où elle acquiert, au contraire, une importance capitale.

NOTE VII.

Sur la théorie des parallèles.

Si l'on juge de la *direction* d'une droite par l'angle dont elle s'écarte d'une direction donnée, deux droites qui forment avec une troisième des angles correspondants égaux *seront de même direction*, et le théorème démontré au § 14 pourra s'énoncer ainsi :

Deux droites de même direction ne peuvent se rencontrer, et sont parallèles.

Cette proposition pourrait être prise pour axiome, en considérant l'idée de *direction* comme une donnée fondamentale de l'expérience. Dès lors, il serait évident que deux droites qui se rencontrent ont des directions différentes, et par suite celles qui ont la même direction ne peuvent se rencontrer.

Dans cet ordre d'idées, l'axiome réciproque, c'est-à-dire l'axiome IV du § 15, pourrait s'énoncer comme il suit :

Dans un plan, une droite quelconque rencontre toutes celles qui n'ont pas la même direction.

Cet énoncé devient encore plus évident, lorsqu'on le rapproche de ce que nous avons dit (§ 6) de la génération rectiligne du plan.

Cette manière de présenter la théorie des parallèles est plus simple et plus symétrique que la méthode ordinaire, et nous semble avantageuse pour un *premier enseignement* de la Géométrie (2). En revenant plus tard sur

---

(1) *Géométrie imaginaire* (*Journal de Crelle*, t. XVII, 1837). — *Pangeometrie* (Kazan, 1855). — *Voir* aussi J. Bolyai, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, etc.

(2) *Voir* Note IX.

e consider || a property of the plane.
Can we except by || do justice to the
"deux quelconques" of Note III.

cet objet, on montrerait, comme nous l'avons fait au § 14, que le parallélisme des droites de même direction est une conséquence des axiomes précédents.

NOTE VIII.

Sur la longueur d'une ligne courbe.

On démontre, dans la plupart des Traités de Calcul intégral, ce théorème, qu'*il existe une limite commune, finie et déterminée, pour les périmètres des polygones infinitésimaux inscrits et circonscrits à un arc de courbe donné.* On peut présenter cette démonstration sous une forme tout à fait élémentaire, sans employer l'algorithme de l'Analyse transcendante.

La démonstration repose sur le *principe fondamental* du Calcul intégral (1), savoir, que, dans une somme d'éléments infiniment petits, on peut, sans changer la limite de cette somme, altérer chacun de ces éléments d'une fraction de lui-même infiniment petite. — En effet, en remplaçant toutes ces fractions par la plus grande d'entre elles, qui est encore infiniment petite, on voit que l'altération de la somme est moindre que cette fraction *maximum* de la somme elle-même, c'est-à-dire que, si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sont tous moindres que ε, on a $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots < \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$. La somme des α étant supposée finie, l'altération sera donc moindre qu'une fraction infiniment petite d'une quantité finie, et par suite elle sera infiniment petite. Donc l'altération de la limite sera la limite d'un infiniment petit, c'est-à-dire *zéro*.

Cette démonstration ne repose, comme on voit, sur aucune considération qui dépasse les principes que l'on a souvent occasion d'invoquer en Géométrie élémentaire.

Disons en passant que ce principe fournit immédiatement les démonstrations les plus simples des théorèmes sur l'équivalence de deux prismes ou de deux pyramides de même base et de même hauteur.

Supposons maintenant que l'on ait un triangle dont un seul angle soit infiniment petit. Le côté opposé à cet angle sera infiniment petit *par rapport à chacun des deux autres*, et il en sera de même, à plus forte raison, de la différence de ces deux côtés *par rapport à chacun d'eux* (2). Nous énoncerons ce résultat d'une manière abrégée, en disant que les deux côtés qui comprennent l'angle infiniment petit *diffèrent infiniment peu* l'un de l'autre.

Il résulte de là que, si l'on projette, par des parallèles de direction quel-

---

(1) Duhamel, *Éléments de Calcul infinitésimal*, t. I, p. 35.

(2) Le rapport de cette différence à chacun des côtés serait même infiniment petit *du second ordre*, si le triangle était rectangle.

conque, orthogonale ou non, une droite de longueur donnée sur un axe faisant avec cette droite un angle infiniment petit, la différence entre la droite et sa projection sera infiniment petite *par rapport* à chacune d'elles; en d'autres termes, la droite et sa projection *différeront infiniment peu.*

Donc, si la droite qui ferme un contour polygonal fait avec chacun des côtés de ce contour des angles infiniment petits, la longueur de cette droite ne différera qu'infiniment peu de celle du contour polygonal.

Cela posé, considérons un arc d'une courbe, que nous supposerons plane, pour plus de simplicité, et admettons que cet arc soit entièrement convexe (1). D'après les corollaires de la proposition 20 du premier Livre d'*Euclide* (§ 24), on voit : 1° que le contour d'un polygone inscrit dans l'arc convexe croît à mesure que l'on établit de nouveaux sommets intermédiaires, en subdivisant les arcs; 2° que le contour d'un polygone circonscrit au même arc diminue à mesure que l'on trace de nouveaux côtés, dont les points de contact subdivisent les arcs; 3° qu'un quelconque des contours inscrits est toujours moindre qu'un quelconque des contours circonscrits.

On en conclut d'abord : 1° que les contours inscrits, dont on augmente le nombre des côtés suivant une certaine loi, allant d'une part toujours en croissant, mais restant d'autre part toujours moindres qu'un polygone circonscrit quelconque, tendront nécessairement vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision;

2° Que les contours circonscrits, allant toujours en diminuant par la subdivision des arcs, et restant toujours supérieurs à un polygone inscrit quelconque, tendront aussi vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision.

Il reste à prouver que tous ces contours, tant inscrits que circonscrits, tendent vers une seule et même limite, indépendante de la loi de subdivision.

Considérons un côté d'un contour inscrit, et un polygone inscrit dans l'arc sous-tendu par ce côté. Si ce côté est assez petit, sa direction, ainsi que la direction d'un côté quelconque du polygone en question, fera un angle aussi petit qu'on voudra avec la tangente en un quelconque des points de l'arc. Donc, d'après la proposition démontrée ci-dessus, le côté et le polygone diffèrent l'un de l'autre *infiniment peu.*

Soient maintenant deux polygones inscrits quelconques, à côtés suffisamment petits. Si nous les comparons l'un et l'autre au polygone formé par la réunion de tous leurs sommets, et correspondant par conséquent à une subdivision de chacun des deux systèmes d'arcs, chaque côté de l'un quelconque des deux contours primitifs différera infiniment peu de la portion correspondante du troisième contour. Donc chacun des deux premiers contours différera infiniment peu du troisième, et par suite les deux premiers contours différeront infiniment peu l'un de l'autre. Donc ils ne peuvent tendre que vers une seule et même limite.

---

(1) S'il ne l'était pas, on le décomposerait en portions convexes.

On étendrait de même ce résultat à deux polygones circonscrits, ou à un polygone inscrit comparé avec un polygone circonscrit.

Ainsi se trouve établie l'existence de la *longueur* d'une courbe plane.

Il en résulte en même temps :

1° Que cette longueur est plus grande que celle d'une ligne droite ayant les mêmes extrémités;

2° Qu'une courbe convexe est plus courte qu'une courbe quelconque qui l'enveloppe de toutes parts sans la couper, ou qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités;

3° Que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est égale à l'unité.

Le même mode de démonstration servirait à établir l'existence de la longueur d'une courbe non plane, et celle de l'aire d'une surface courbe.

NOTE IX.

Réflexions sur l'enseignement de la Géométrie élémentaire.

Tout le monde s'accorde à répéter que l'un des buts de l'enseignement des Mathématiques doit être de donner plus de rectitude à l'esprit, en lui offrant un modèle d'une logique inflexible, appliquée à des principes certains. Pour que ce but soit atteint, il faut évidemment que l'enseignement ne se départe jamais de cette rigueur qui distingue les Mathématiques de toutes les autres Sciences, et c'est là une condition essentielle pour que cette étude soit fructueuse, aussi bien comme gymnastique intellectuelle que comme source d'applications pratiques.

Mais la rigueur, telle que nous la concevons, n'est nullement compromise par l'omission volontaire de la démonstration d'une proposition, tandis qu'elle l'est par l'introduction d'une démonstration fausse ou incomplète. La logique n'a rien à souffrir d'une lacune laissée provisoirement dans la suite des raisonnements, pourvu que cette lacune soit clairement indiquée, et qu'on ne cherche pas à la dissimuler.

C'est d'après cette manière de voir que nous concevons la possibilité d'un enseignement gradué de la Géométrie élémentaire, conduit, à tous ses degrés, d'après un plan unique et invariable, toujours soumis aux règles de la plus sévère logique, et où les difficultés ne se montreraient qu'à mesure que les esprits seraient préparés à les aborder.

Pour cela, l'étude de la Géométrie devrait être reprise successivement à divers points de vue, correspondant aux divers degrés d'initiation des élèves. Pour les commençants, il s'agit avant tout de se familiariser avec les figures et leurs dénominations, d'apprendre des faits, d'entrevoir leurs applications les plus simples et les plus immédiates, celles surtout qui se rapportent aux usages de la vie ordinaire. On devra donc, au début, multiplier les axiomes, employer, au lieu de démonstrations, les vérifications

expérimentales, l'analogie, l'induction, en ne laissant jamais oublier que ce mode d'exposition est essentiellement provisoire. On exercera l'élève aux tracés graphiques, au maniement des instruments, à la solution de divers problèmes de levé des plans et d'arpentage, à la construction des figures en relief au moyen de fils ou d'argile plastique, à la représentation de ces figures à l'aide de leurs projections, etc., etc. Le maître saura proportionner au degré de développement intellectuel de l'élève la part plus ou moins grande qu'il devra faire au raisonnement, dans cette première ébauche des études géométriques; et la grande variété d'applications qu'offrent la Géographie, l'Astronomie, l'Arpentage, la Stéréotomie, etc. suffira pour donner à cet enseignement un intérêt soutenu.

On pourra mêler à la Géométrie pure et appliquée l'étude des propriétés les plus simples des nombres entiers, que l'on représentera par des points régulièrement distribués sur des droites ou sur des plans, ou encore par des longueurs de droites, des aires de rectangles ou des volumes de parallélépipèdes. Cette manière de traiter l'Arithmétique conduit aussi promptement que la méthode abstraite aux règles du Calcul, et chaque raisonnement acquiert une plus grande clarté par cette représentation qui parle aux yeux.

On exposera ensuite le système des poids et mesures, tandis que, d'un autre côté, on étudiera les propriétés des proportions entre nombres rationnels.

Remarquons que les diverses théories que nous venons d'énumérer, et qui devront servir de préliminaires à l'étude rigoureuse de la Géométrie, ne sont pas destinées, selon nous, à faire l'objet d'une suite unique de leçons. On ne doit pas craindre de se répéter, dans un enseignement scientifique, et les élèves devront suivre successivement plusieurs cours [illegible] dont chacun comprendra les matières du cours précédent, plus les nouveaux développements qu'on y ajoutera, en faisant au raisonnement une plus large part.

Mais les programmes de ces cours successifs ne devront pas être tracés au hasard, indépendamment les uns des autres. Il faudra se garder, avant tout, d'altérer l'ordre des propositions pour substituer à une démonstration difficile un raisonnement plus simple en apparence et moins rigoureux. Si une démonstration présente quelques difficultés pour l'intelligence de l'élève, qu'on la supprime, sans la remplacer autrement que par des explications, des analogies, des vérifications expérimentales. Mais que la subordination des vérités géométriques, telle que l'exigera plus tard une étude scientifique et approfondie, soit conservée sans altération à tous les degrés de l'enseignement. Qu'il y ait unité de plan, et que les cours les plus élémentaires ne diffèrent des cours les plus élevés que par des suppressions, de telle sorte que la place de chaque démonstration soit toujours réservée, et qu'on n'ait plus qu'à l'y intercaler, lorsque l'esprit de l'élève sera suffisamment préparé.

Le premier enseignement sera donc exclusivement expérimental, et peu à peu on fera voir à l'élève comment toutes les vérités n'ont pas besoin

d'être séparément constatées par l'expérience, et comment elles sont les conséquences d'un certain nombre d'entre elles, nombre que l'on restreindra de plus en plus, à mesure que l'on avancera dans l'étude de la Science, jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux axiomes fondamentaux, dont le nombre ne peut plus être réduit.

Telle doit être, à notre avis, la première période de l'enseignement géométrique, et le programme que nous venons d'esquisser comprend toutes les notions mathématiques nécessaires aux commençants. Parallèlement à cet enseignement, l'élève pourra suivre utilement des cours élémentaires de Cosmographie, de Mécanique, de Physique, de Chimie, où il rencontrera à chaque instant des applications de ses connaissances en Géométrie et en Arithmétique.

Le second degré d'enseignement se rapprocherait, d'après nos idées, du système actuellement suivi dans les classes de science des lycées français. En Géométrie, on adopterait la méthode euclidienne dans toute sa rigueur, et le cadre des études embrasserait à peu près les *Éléments* d'Euclide et les premières notions sur les sections coniques.

On joindrait à cette étude celle des premières notions d'Algèbre, en rattachant les règles du calcul algébrique aux propriétés des figures par des raisonnements analogues à ceux du second Livre d'Euclide. On établirait ainsi par la Géométrie, en même temps que par l'Analyse abstraite, les principales règles de la multiplication algébrique, la résolution des équations du second degré, les principaux théorèmes sur les maxima et les minima, etc.

L'étude rigoureuse de la Géométrie conduisant tout naturellement au principe des limites et à la considération de l'incommensurabilité, on serait alors amené à introduire les symboles appelés *nombres incommensurables*, et à revenir sur la théorie des proportions, en l'étendant à des grandeurs continues, généralement incommensurables.

On pourrait passer de là à l'étude des logarithmes et de la Trigonométrie.

Mais cette étude de la Géométrie scientifique et rigoureuse doit elle-même être graduée, comme celle de la Géométrie *expérimentale*. S'il peut être avantageux, dans une première exposition, de s'attacher autant que possible à la méthode des anciens, afin d'établir d'abord avec brièveté et précision les faits fondamentaux de la Science, il nous semble, au contraire, que dans les revisions successives du cours de Géométrie, on devra s'étudier de préférence à faire comprendre, par des applications aux vérités simples et désormais bien connues de la Géométrie élémentaire, les grandes méthodes et les puissants procédés de l'Analyse moderne. On pourra, de cette manière, sans sortir du cadre d'Euclide, initier l'élève à tous les procédés qu'il aura plus tard à appliquer dans les parties les plus élevées de la Science.

Ainsi, on sait quelles sont, en Géométrie et en Arithmétique, les nombreuses applications du principe des limites.

L'étude des lieux géométriques, employés comme moyens généraux de résolution des problèmes déterminés, conduira naturellement à la notion

de fonction d'une ou de deux variables indépendantes. En y joignant même le mouvement, on aura une représentation sensible des fonctions de trois et même de quatre variables.

Le cercle et les sections coniques donneront lieu d'appliquer la méthode des tangentes, et de présenter la méthode des limites sous la forme plus commode de la méthode infinitésimale.

On reviendra alors avec plus de détails sur les questions de maxima et de minima, et on les ramènera à la méthode des tangentes, dans le cas d'une seule variable indépendante.

Les quadratures et les cubatures des lignes et des surfaces pourront s'effectuer non seulement par les méthodes détournées des Anciens, mais encore par les méthodes directes sur lesquelles est fondé le Calcul intégral. Ainsi l'équivalence de deux prismes de même base et de même hauteur pourra s'établir par la division en tranches infiniment minces, comme nous l'avons déjà indiqué dans la Note précédente.

C'est alors qu'il conviendra d'introduire les notions de *longueur* d'une ligne courbe quelconque et d'*aire* d'une surface courbe quelconque, en justifiant et généralisant les définitions restreintes et incomplètes qu'on en avait données, au moyen des polygones réguliers, en traitant du cercle et des trois corps ronds.

On peut enfin, sans sortir du même cadre, donner des exemples de courbes enveloppes, d'applications de la méthode inverse des tangentes, etc.

En un mot, la Géométrie d'Euclide peut servir de texte à une exposition de tous les principes fondamentaux de l'Analyse moderne, et l'on conçoit quel fruit un esprit intelligent pourrait retirer d'une telle préparation à l'étude de la Géométrie analytique et du Calcul infinitésimal.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE .....

INTRODUCTION 1

LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS DU PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE..... 11

EXPOSITION DES PREMIERS PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 41

APPENDICE. — NOTE I. Du rôle de l'expérience dans les Sciences exactes .. 63

NOTE II. Sur le mouvement géométrique..... 70

NOTE III. Sur les axiomes relatifs à l'existence du plan et de la ligne droite. 71

NOTE IV. Sur la définition de la ligne droite..... 73

NOTE V. Sur l'unité angulaire..... 77

NOTE VI. Sur l'axiome 11 (dit postulatum) d'Euclide..... 80

NOTE VII. Sur la théorie des parallèles..... 85

NOTE VIII. Sur la longueur d'une ligne courbe..... 86

NOTE IX. Réflexions sur l'enseignement de la Géométrie élémentaire 88

8544 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

ARGAND (R.). — **Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.** 2e édition, précédée d'une préface par M. J. Hoüel, in-8 avec figures. 1874. . . . . 1 fr.

HOUEL (J.), Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Cours de Calcul infinitésimal.** Quatre beaux volumes grand in-8, avec figures dans le texte; 1878-1879-1880-1881.

On prend séparément :

Tome I.	15 fr.
Tome II.	20 fr.
Tome III.	20 fr.
Tome IV.	20 fr.

HOUEL (J.), Professeur de Mathématiques pour la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Tables de Logarithmes à CINQ DÉCIMALES pour les Nombres et les Lignes trigonométriques,** suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction de Gauss et de Tables usuelles. Gr. in-8, 1882. L'Instruction de cet Ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes en date du 21 août 1882. . . . 2 fr.

HOUEL (J.), Professeur de Mathématiques pour la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Recueil de Formules et de Tables numériques,** formant le complément des Tables de logarithmes à cinq décimales des mêmes Auteurs; 2e édition, revue et complétée. Grand in-8. . . . . 1 franc pour l'étranger.

HOUEL (J.). — **Sur le développement de la fonction perturbatrice** suivant les forces indiquées par Hansen dans le Journal des [illegible] 1[illegible]. 1[illegible]-8, 187[illegible]. . . . . 1 fr.

HOUEL (J.). — **Considérations élémentaires sur [illegible] relative de l'idée de quantité dans l'Analyse m[illegible]** [illegible] de l'Enseignement de la Philosophie [illegible]

SCHNUSE (L.). — **Tables de logarithmes à 7 [illegible]** [illegible] de 1 jusqu'à [illegible] et pour les lignes trigonométriques [illegible] et **Table d'interpolation pour le calcul des parties proportionnelles;** précédées d'une Introduction par **M. J. Houel,** Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. 1 beau volume grand in-8° jésus, avec vignette [illegible]. Paris, 1881.

	Broché.	Cartonné.
	fr. c.	fr. c.
1. Tables de Logarithmes.		
2. Table d'interpolation.		
Tables de Logarithmes et Table d'interpolation réunies en un seul volume.	12	1[illegible]

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique de l'École Polytechnique,** rédigé d'après le vœu du Conseil, par **M. E. Prouhet,** Professeur à l'École Polytechnique. 2e édition, revue et augmentée par M. [illegible] Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences. 2 vol. in-8, avec figures dans le texte. 1880. . . . . 1[illegible] fr.